第25卷　第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.25　No.2
2004年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2004

文章编号　1000-5013(2004)02-0203-03

向前向后法证明一阶逻辑的几个定理

潘　孝　铭

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362011)

摘要　向前向后方法是模型论及其应用研究中的一个很重要的工具. 一阶逻辑的内插定理和保持定理确定了符合某些条件的公式的存在性, 经典模型论中对这些的证明较为繁难. 文中使用向前向后方法, 对有限语言下一阶逻辑的内插定理和保持定理等几个定理, 给出一种简洁的证明.

关键词　模型论, 一阶逻辑, 向前向后方法, 内插定理, 保持定理
中图分类号　O 141.4; O 153　　　　文献标识码　A

一阶逻辑的内插定理和保持定理确定了符合某些条件的公式的存在性, 经典模型论中用常量方法、图象方法和初等链方法等来证明. 本文使用向前向后方法, 给出了这几个定理的简洁证明.

1　预备知识

本文以模型论知识为基础, 有关无穷逻辑和 Ehrenfeucht-Fraïssé 博奕的知识参见文[1~4]. 我们限定本文范围为有限语言, 它包括了关系和常量符号. 下面给出几个有关的概念和定理.

定义 1　对模型 $\mathscr{A}=(A, \cdots)$, A 上的有限序列 $\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_i)$ 和 $n\in\mathbf{N}$. 当 $\boldsymbol{a}\neq\varnothing$ ($\varnothing$ 为空序列)时, A 中的 $\boldsymbol{a}$ 的 n-特征是符合如下归纳定义的一阶公式 $\varepsilon^n_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}$, 其中 $x_1, \cdots, x_i$ 自由, $x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}$ 约束. (1) $\varepsilon^0_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}$ 是所有自由变元在 $(x_1, \cdots, x_i)$ 中, 并且被 $\boldsymbol{a}$ 满足的原子公式或其否定的合取. (2) $\varepsilon^{n+1}_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}$ 是 $\bigwedge_{a\in A}\exists x_{i+1}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}\wedge\forall x_{i+1}\bigvee_{a\in A}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}$. 当 $\boldsymbol{a}=\varnothing$ 时, 约定 $\varepsilon^0_{\mathscr{A},\varnothing}$ 为在 $\mathscr{A}$ 中成立的无自由变元原子公式或其否定的合取, $\varepsilon^n_{\mathscr{A}}=\varepsilon^n_{\mathscr{A},\varnothing}$. 显而易见, 对任意模型 $\mathscr{A}$, A 中任意长度为 i 的序列 $\boldsymbol{a}$ 和 n, 只有有限多的形如 $\varepsilon^n_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}$ 的公式.

定义 2　对模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 论域 A 和 B 上的有限单射关系 $\backsim$, 如果对原子公式 φ, 当 $a_j\backsim b_j$ ($j=1, \cdots, i$) 有 $\mathscr{A}\models\varphi(a_1, \cdots, a_i)\Leftrightarrow\mathscr{B}\models\varphi(b_1, \cdots, b_i)$. 那么, 称有限关系 $\backsim\subseteq A\times B$ 是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的一个局部同构.

引理 1　(1) $\mathscr{A}\models\varepsilon^n_{\mathscr{A}}$. (2) 如果 $\mathscr{B}\models\varepsilon^n_{\mathscr{A}}$, 定义 $R_i\subseteq A^i\times B^i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 为 $R_i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\equiv\mathscr{B}\models\varepsilon^{n-i}_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$. (a) R_0 为真. (b) 对 $0\leqslant i\leqslant n$, 如果 $R_i(a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_i)$, 则 $\{(a_j, b_j)\mid 1\leqslant j\leqslant i\}$ 是模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的局部同构. (c) 对 $0\leqslant i\leqslant n$, 如果 $R_i(a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_i)$, 则有(向前) $\forall\boldsymbol{a}\in A\,\exists\boldsymbol{b}\in B R_{i+1}(a_1, \cdots, a_i, a, b_1, \cdots, b_i, \boldsymbol{b})$, 并且(向后) $\forall\boldsymbol{b}\in B\,\exists\boldsymbol{a}\in A R_{i+1}(a_1, \cdots, a_i, \boldsymbol{a}, b_1, \cdots, b_i, \boldsymbol{b})$.

证明　(1) 先证明一个更强的命题, 对 $n\in\mathbf{N}$, 有 $\mathscr{A}\models\varepsilon^n_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$. 用归纳法证明该命题. 基础步骤, 令 $\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_i)$. 因为 $\varepsilon^0_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}=\bigwedge\{\varphi[x_1, \cdots, x_i]\mid\mathscr{A}\models\varphi[a_1, \cdots, a_i]\}$, 所以 $\mathscr{A}\models\varepsilon^0_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$. 归纳步骤, 假设对 $n>0$, 有 $\mathscr{A}\models\varepsilon^n_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$. 因为 $\varepsilon^{n+1}_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}=\bigwedge_{a\in A}\exists x_{i+1}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}\wedge\forall x_{i+1}\bigvee_{a\in A}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}$. 又对 $a\in\mathscr{A}$, 有 $\exists x_{i+1}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}$ 是 $\varepsilon^n_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}$ 的合取项 $\forall x_{i+1}\bigvee_{a\in A}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}$ 是 $\varepsilon^n_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}$ 的析取项. 所以 $\bigwedge_{a\in A}\exists x_{i+1}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}\wedge\forall x_{i+1}\bigvee_{a\in A}\varepsilon^n_{\mathscr{A},(a_1,\cdots,a_i,a)}$ 能被 $\boldsymbol{a}$ 满足, 从而 $\mathscr{A}\models\varepsilon^{n+1}_{\mathscr{A},\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{a}]$. 命题得证. 令 $\boldsymbol{a}=\varnothing$, 即得 $\mathscr{A}\models\varepsilon^n_{\mathscr{A}}$. 证毕.

(2) (a) R_0 按定义写出为 $R_0\equiv\mathscr{B}\models\varepsilon^n_{\mathscr{A}}$. (b) 假设 $\varphi(x_1, \cdots, x_i)$ 为原子公式. 当 $\mathscr{A}\models\varphi(a_1, \cdots, a_i)$,

收稿日期　2003-09-01
作者简介　潘孝铭(1968-), 男, 讲师, 博士, 主要从事计算机科学理论的研究. E-mail: gocl@hqu.edu.cn
基金项目　福建省青年科技人才创新基金资助项目(2002J011)

则 $\varphi(x_1, \cdots, x_i)$ 为 $\varepsilon^{n-i}_{A,(a_1,\cdots,a_i)}$ 的合取项. 由 $R_i(a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_i)$ 的定义, 则 $(b_1, \cdots, b_i)$ 满足 $\varphi(x_1, \cdots, x_i)$, 即 $\mathscr{B}=\varphi(a_1, \cdots, a_i)$. 当 $\mathscr{B}=\varphi(b_1, \cdots, b_i)$, 用反证法证明. 假设 $\mathscr{A}\neq\varphi(a_1, \cdots, a_i)$, $\mathscr{A}=\neg\varphi(a_1, \cdots, a_i)$, 则 $\neg\varphi(x_1, \cdots, x_i)\in\varepsilon^{n-i}_{A,(a_1,\cdots,a_i)}$. 从而 $(b_1, \cdots, b_i)$ 满足 $\neg\varphi(x_1, \cdots, x_i)$, 即 $\mathscr{B}=\neg\varphi(b_1, \cdots, b_i)$, 与前提矛盾. 因此必有 $\mathscr{A}=\varphi(a_1, \cdots, a_i)$. 这就得出 $\mathscr{A}=\varphi(a_1, \cdots, a_i)\Leftrightarrow\mathscr{B}=\varphi(b_1, \cdots, b_i)$. 从而由定义, $\{(a_j, b_j)\mid 1\leqslant j\leqslant i\}$ 是模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的局部同构. 证毕.

(3) $\varepsilon^{n-i}_{A,(a_1,\cdots,a_i)}=\bigwedge_{a\in A}\exists x_{i+1}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}\wedge\forall x_{i+1}\bigvee_{a\in A}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}$. 由 $R_i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\equiv\mathscr{B}=\varepsilon^{n-i}_{A,\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{b}=(b_1, \cdots, b_i)$ 满足 $\bigwedge_{a\in A}\exists x_{i+1}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}$ 和 $\forall x_{i+1}\bigvee_{a\in A}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}$. 对 $a\in A$, $(b_1, \cdots, b_i)$ 满足合取支 $\exists x_{i+1}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}$, 即 $\mathscr{B}=\exists x_{i+1}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}(b_1, \cdots, b_i, b)$, 则存在 $b\in B$, $\mathscr{B}=\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}(b_1, \cdots, b_i, b)$. 即得(向前) $\forall a\in A\ \exists b\in B R_{i+1}(a_1, \cdots, a_i, a, b_1, \cdots, b_i, b)$. 由 $(b_1, \cdots, b_i)$ 满足 $\forall x_{i+1}\bigvee_{a\in A}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}$, 则对 $b\in B$, $(b_1, \cdots, b_i, b)$ 满足 $\bigvee_{a\in A}\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}$. 从而 $(b_1, \cdots, b_i, b)$ 至少满足一个析取支, 即存在 $a\in A$, $(b_1, \cdots, b_i, b)$ 满足 $\varepsilon^{n-i-1}_{A,(a_1,\cdots,a_i,a)}$. 即得(向后) $\forall b\in B\ \exists a\in A R_{i+1}(a_1, \cdots, a_i, a, b_1, \cdots, b_i, b)$. 证毕.

定义 3 如果对模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的局部同构的非空集 I, 任何 $h\in I$, 有 $\forall a\in A\ \exists b\in B(h\cup\{(a, b)\}\in I)$ 并且 $\forall b\in B\ \exists a\in A(h\cup\{(a, b)\}\in I)$. 则称模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的局部同构的非空集见证模型部分同构.

引理 2 如果无穷关系序列 $R_0, R_1, R_2, \cdots$ 使得 $R_i\subseteq A^i\times B^i$, 并且对于任何 i, 引理 1(2) 的 (a)～(c) 条件成立. 那么, $\bigcup_i\{\{(a_1, b_1), \cdots, (a_1, b_1)\}\mid R_i(a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_i)\}$ 见证模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的部分同构.

证明 令 $I=\bigcup_i\{\{(a_1, b_1), \cdots, (a_1, b_1)\}\mid R_i(a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_i)\}$, 任取 $h\in I$, 不妨设 $h=\{(a'_1, b'_1), \cdots, (a'_j, b'_j)\}$, 则必有 $R_j(a'_1, \cdots, a'_j, b'_1, \cdots, b'_j)$ 成立. 由引理 1(2) 的 (c) 成立, 则有(向前) $\forall a\in A\ \exists b\in B R_{j+1}(a'_1, \cdots, a'_j, a, b'_1, \cdots, b'_j, b)$; (向后) $\forall b\in B\ \exists a\in A R_{j+1}(a'_1, \cdots, a'_j, a, b'_1, \cdots, b'_j, b)$. 从而, $\{(a'_1, b'_1), \cdots, (a'_j, b'_j), (a, b)\}=h\cup\{(a, b)\}\in I$. 因此, $I=\bigcup_i\{\{(a_1, b_1), \cdots, (a_1, b_i)\}\mid R_i(a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_i)\}$ 见证模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的部分同构. 证毕.

定理 1 如果 I 见证两个可数模型的部分同构. 则存在 $h\subseteq\bigcup I$ 是一个同构.

证明 假设 I 见证两个可数模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的部分同构, 由 Ehrenfeucht-Fraïssé 博奕, p 是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的局部同构. 那么, 在有甲和乙两个选手参加的对于模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的博弈中, 乙有必胜策略[2]. 不妨设 $A=(a_0, a_1, a_2, \cdots)$, $B=(b_0, b_1, b_2, \cdots)$, $A\cap B=\varnothing$. 让选手甲枚举 A 和 B 中的元素, 让选手乙总使用对应于 I 中的局部同构的必胜策略, 则得到 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的一个同构 h. 它使得 $h(a'_i)=b'_i$, a'_i 遍历 A, 即 $\mathrm{dom}(h)=A$ 且 $\mathrm{range}(h)=B$, 因此 $h\subseteq\bigcup I$ 是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的一个同构. 证毕.

定义 4 假设 $\mathscr{A}_i=(A_i, \cdots)$ 是一个 L_i-模型 $(i=1, 2)$, 并且 L 是 L_1 和 L_2 (都有两个新的一元关系符号 U_1, U_2) 的并集. 模型对 $\mathscr{A}=(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ 是 L-模型, 域为 $A_1\cup A_2$, $U^{\mathscr{A}}_i=A_i(i=1, 2)$, 符号 L_i 仍保持原义.

2 一阶逻辑几个定理的证明

定理 2 (一致性定理) 假设 T_i 是语言 $L_i(i=1, 2)$ 的句子集, 使得 $T_1\cup T_2$ 没有模型, 则存在一个 $T_1\cap T_2$ 的句子使得 $T_1|=\varphi$ 和 $T_2|=\neg\varphi$.

证明 假设没有这样的句子 φ 存在, 令 $L=L_1\cap L_2$. 那么, 有一个命题: 对 $n\in\mathbf{N}$, 存在 $\mathscr{A}=T_1$ 和 $\mathscr{B}=T_2$, 使得 $\mathscr{B}=\varepsilon^n_{\mathscr{A}|L}$ ($\mathscr{A}L$ 表示 L_1-模型的 L-规约). 命题的证明. 假设对整数 n 命题不成立, 考虑语言 L 句子的有限集 $\Sigma\{\varepsilon^n_{\mathscr{A}|L}\mid\mathscr{A}=T_1\}$, 只需证明 (1) $T_1|=\vee\Sigma$ 和 (2) $T_2|=\neg\vee\Sigma$. 如果 $\mathscr{A}=T_1$, 则 $\varepsilon^n_{\mathscr{A}|L}\in\Sigma$. 由引理 1(1), 得到 $\mathscr{A}=\neg\vee\Sigma$. 从而 $T_1|=\vee\Sigma$. 如果 $\mathscr{B}=\vee\Sigma$, 则对某个 $\mathscr{A}=T_1$, 得到 $\mathscr{B}=\varepsilon^n_{\mathscr{A}|L}\in\Sigma$. 由假设, 对整数 n 命题不成立, 得到 $\mathscr{B}\neq T_2$. 故 $T_2|=\neg\vee\Sigma$. 命题得证.

考虑 $\mathscr{A}=T_1$ 和 $\mathscr{B}=T_2$ 时构成的模型, 对 $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ 扩充无限多关系 $R_1, R_2, \cdots$ 形成的理论 $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \cdots)$, 使得对任何 i, $\mathscr{A}L$, $\mathscr{B}L$, $R_1, R_2, \cdots$ 满足引理 1(2) 的条件 (a)～(c). 由上面的命题

和引理 1(2), 显然这个理论是有限可满足的. 这样, 紧致性定理和下降的 L-S-T 定理保证了该理论的可数实现$(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots)$. 由引理 2, $\mathscr{A}L$, $\mathscr{B}L$ 是部分同构的. 由定理 1 得到 $\mathscr{A}L \cong \mathscr{B}L$, $\mathscr{A}L$, $\mathscr{B}L$ 的一致, 则$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, R_1, R_2, \ldots)$即为 $T_1 \cup T_2$ 的要求的模型. 证毕.

定理 3　(内插定理) L_i 语言句子 $\varphi_i (i = 1, 2)$, $\varphi_1 \models \varphi_2$, 则有 $L_1 \cap L_2$ 句子 φ, 使得 $\varphi_1 \models \varphi$ 和 $\varphi \models \varphi_2$.

证明　用反证法. 假设不存在这样的句子, 令 $L = L_1 \cap L_2$, 如定理 2 的证明一样. 对每个 $n \in \boldsymbol{N}$, 存在 $\mathscr{A} \models \varphi_1$, $\mathscr{A} \models \neg \varphi_2$, 使得 $\mathscr{B} \models \varepsilon^n_{A|L}$. 由紧致性定理和下降的 L-S-T 定理, 引理 2 和定理 1, 得到 $\varphi_1 \cup \neg \varphi_2$ 的一个模型 C, 即 $C \models \varphi_1$, $C \models \neg \varphi_2$. 与前提矛盾. 证毕.

定理 4　(可定义定理) 假设 $L^+ = L\{R\}$, 并且 T 是 L^+ 理论, 使得对任意两个模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 如果 $\mathscr{A}L = \mathscr{B}L$, 则 $R^{\boldsymbol{A}} = R^{\boldsymbol{B}}$. 那么存在一个公式 $\varphi = \varphi(x)$, 有 $T \models \forall x (R(x) \leftrightarrow \varphi)$.

证明　假设对 $\mathscr{A}$ 没有这样的公式 φ 存在. 那么, 对任意 n, 存在 $\mathscr{A} \models T$ 和 $a \in A$ 用 $R^{\boldsymbol{A}}(a)$ 解释, 存在 $\mathscr{B} \models T$ 和 $b \in B$ 用 $R^{\boldsymbol{B}}(b)$ 解释. 它使得 $\mathscr{B} \models \varepsilon^n_{A|L, a}[\boldsymbol{b}]$(若对 n 不成立, $\vee \{\varepsilon^n_{A|L, a} | \mathscr{A} \models T \wedge R^{\boldsymbol{A}}(a)\}$为 R 的定义). 由引理 1, 2 和定理 1, 对得到的可数模型 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 及 $\mathscr{A}L$, $\mathscr{B}L$ 间的同构 h, 存在 $a \in A$, 使得 $R^{\boldsymbol{A}}(a)$, 但 $\neg R^{\boldsymbol{A}}(h(b))$. 与假设矛盾. 证毕.

定理 5　(保持性定理) 每个在扩充下保持的句子, 都有一个与之等价的存在句子.

证明　修改 $\varepsilon^n_{\boldsymbol{A}}$, 令 $\varepsilon^{n+1}_{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}}$ 是 $\bigwedge_{a \in A} \exists x_{i+1} \varepsilon^n_{\boldsymbol{A}, (a_1, \ldots, a_i, a)}$, 这就得到一个存在公式. 证毕.

定理 6　(保持性定理) 每个在同态下保持的句子, 都有一个与之等价的正句子.

证明　用反证法. 令 $\varepsilon^0_{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}}$ 是被 $\boldsymbol{a}$ 满足的所有正文字的合取, 这样得到的句子是正的. 假设 Φ 没有等价的正句子, 则对每个 $n \in \mathbf{N}$, 存在 $\mathscr{A} \models \Phi$, $\mathscr{B} \models \neg \Phi$, 使得 $\mathscr{B} \models \varepsilon^n_{\boldsymbol{A}}$. 如果对任意 n 为假, 则 $\vee \{\varepsilon^n_{\boldsymbol{A}} | \mathscr{B} \models \Phi\}$ 是 Φ 的一阶等价句子. $\mathscr{B} \models \varepsilon^n_{\boldsymbol{A}}$ 条件, 保证满足向前向后性质的局部同构的有限关系序列 $R_0, \ldots, R_n$ 的存在. 由 L-S-T 定理和紧致性定理, 得到一个可数复合模型$(\mathscr{A}, \mathscr{B}, R_0, R_1, R_2, \ldots)$, $\mathscr{A} \models \Phi$, $\mathscr{B} \models \neg \Phi$, 使得 $\cup_i \{\{a_1, b_1), \ldots, (a_i, b_i)\} | R_i(a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_i)\}$ 现在是部分同构. 由定理 1, 从而 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的同态象. 但 Φ 不在同态下保持. 与前提矛盾. 证毕.

3　结束语

由以上一阶逻辑几个定理的证明, 说明用向前向后方法比经典模型论方法更简洁. 将向前向后方法, 应用于考察各类逻辑公式的保持性和内插性质等的研究. 这是今后很有意义的研究方向.

参　考　文　献

1　王世强. 模型论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2000. 20~40

2　Doets K. Basic model theory[M]. North Holland: CSLI Publicaition, 1996. 30~38

3　Barwise J, Van Benthem J. Interpolation, perservation and pebble games [J]. Symbolic Logic, 1999, 64(4): 881~903

4　潘孝铭. 模态逻辑两个定理的基于向前向后方的法证明[J]. 北京工商大学学报(自然科学版), 2002, 20(4): 62~64

Proving Several Theorems in First Order Logic Based on Back-and-Forth Method

Pan Xiaoming

(College of Info. Sci. & Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　Back-and-forth method is an important tool for studying model theory and its application. Interpolation theorem and preservation theorem in first order logic have determined the existence of first order formula in accordance with certain conditions, their proofs in classical model theory are fairly long and hard to tackle. By using back-and-forth method, the author gives interpolation theorem and preservation theorems a kind of succinct proofs in finite language.

Keywords　model theory, first order logic, back-and-forth method, interpolation theorem, preservation theorem