第25卷　第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.25　No.2
2004年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2004

文章编号　1000-5013(2004)02-0153-03

一种多个粗差的定位与估值的方法

王　仁　谦

(华侨大学土木工程系, 福建 泉州 362011)

摘要　首先分析真误差与残差的关系, 并以此关系为基础, 提出一种新的、有特色的多维粗差探测与定位方法. 该法采用传统的最小二乘平差, 对最小二乘平差的残差进行统计检验. 如果存在粗差, 则可以通过新的估计公式对粗差及未知参数进行估计. 该法可以准确地进行多维粗差的定位和估值, 而且能严密评定估值的精度. 最后, 通过一个算例加以说明.

关键词　粗差, 真误差, 最小二乘法, 粗差探测

中图分类号　P 207+.2; P 221　　文献标识码　A

由于受自然界、仪器及人为等不利因素的影响, 观测数据中除了含有随机误差外, 常会混入粗差(Gross Error). 传统的最小二乘法估计(LS)要求观测数据只含有偶然. 当观测数据含有粗差时, 最小二乘估计会受到很大的干扰, 导致平差结果不可靠. 随着科学技术的迅速发展, 对测量结果的精度和可靠性要求越来越高. 因此, 寻求有效地处理粗差的方法显得越来越重要, 在自动化程度较高、数据量较大的场合尤其重要. 目前, 有两种处理粗差的方法. (1) 是以方差扩大模型为基础的各种抗差估计, 抗差估计的实质就是依据影响函数选择一个观测残差的降函数 $P=P(V)$ 作为观测权[1], 进行平差计算. 对含粗差的观测值降权处理, 减少其对平差结果的影响, 达到抗差的目的. (2) 是以均值移动模型为基础的各种粗差探测方法. 对单个粗差的探测方法较多[2], 探测效果也较好, 但对多维粗差的探测较复杂, 难度较大, 需要作更深入研究. 本文通过对 LS 平差结果的分析, 以均值移动模型为基础, 推导出一种有效的多个粗差的定位与估值方法.

1　残差 $\boldsymbol{V}$ 与真误差 Δ 的关系

高斯-马尔柯夫模型为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\Delta, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为观测向量, $\boldsymbol{X}$ 为未知参数向量, $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的系数矩阵, Δ 为误差向量.

$$\boldsymbol{D}(l)=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}=\sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1},$$

误差方程为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{L}. \tag{2}$$

在最小二乘准则 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}$ 等于最小值时, 其解为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}, \tag{3}$$

残差为

$$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}=-\boldsymbol{Q}_{VV}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}. \tag{4}$$

令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}_{VV}\boldsymbol{P}$, 则有

$$\boldsymbol{V}=-\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}.$$

收稿日期　2003-10-13

作者简介　王仁谦(1958-), 男, 副教授, 在职博士研究生, 主要从事测量数据处理与 GPS 定位动态定位的研究. E-mail: renqianw@hqu.edu.cn

考虑函数模型(1),则有

$$V = -R\Delta. \tag{5}$$

2 粗差和参数的估值

在式(5)中,真误差可表示为

$$\Delta = \Delta_n + \Delta_g,$$

上式中,Δ_n为偶然误差,Δ_g为粗差.在粗差探测理论中,含粗差的观测值可以看作与其它同类观测值具有相同的方差,不同的期望的子样.即

$$\begin{aligned} L_i &= N(E(l_i) + \Delta_g, \sigma), \\ L_j &= N(E(l_j), \sigma), \end{aligned} \tag{6}$$

假设,第I组观测值中存在粗差Δ_g,则有

$$\begin{gathered} V = -R\Delta_n - Re_i\Delta_g = V_{\Delta_n} - Re\Delta_g, \\ V_{\Delta_n} = V + Re\Delta_g, \end{gathered} \tag{7}$$

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 10 & \cdots & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

其中V_{Δ_n}为纯残差矢量.在$V_{\Delta_n}^{\mathrm{T}} V_{\Delta_n}$等于最小值下,可解得粗差的估值为

$$\begin{gathered} \Delta_g = (e_i^{\mathrm{T}} Re_i)^{-1} e_i^{\mathrm{T}} RV = \\ (e_i^{\mathrm{T}} Re_i)^{-1} e_i^{\mathrm{T}} R(AX - l) = (e_i^{\mathrm{T}} Re_i)^{-1} e_i^{\mathrm{T}} RL, \end{gathered} \tag{9}$$

$$Q\Delta_g = (e_i^{\mathrm{T}} Re_i)^{-1}. \tag{10}$$

其参数估值为

$$\hat{X}\Delta_n = (A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P(L - e_i\Delta_g), \tag{11}$$

$$Q_{\hat{X}}\Delta_n = (A^{\mathrm{T}}PA)^{-1} + (A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}Pe_iQ\Delta_g e_i^{\mathrm{T}}PA(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}, \tag{12}$$

$$2V_{\Delta_n} = V + Re_i\Delta_g = -Rl + Re\Delta_g, \tag{13}$$

$$2Q_{V^{\Delta_n}} = R + Re_iQ_{V^{\Delta_g}}e_i^{\mathrm{T}}R. \tag{14}$$

单位权方差估值为

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{V_{\Delta_n}^{\mathrm{T}} V_{\Delta_n}}{(n - t)}, \tag{15}$$

其中,n为观测值个数,t为必要观测数.

以上关于粗差和参数的估值公式是严密的,计算中的难点在于如何确定含粗差的观测值.即如何确定e_i.可以先按LS估计,得残差V_i.然后,计算指标

$$u_i = \frac{V_i}{(\sigma_0 \sqrt{R_{ii}})}$$

选择u_i较大的观测值作为可能含粗差的观测值,由此即可确定e_i.再按式(9)估算粗差的值,按式(11)计算参数的估值$\hat{X}_{\Delta_n}$.

3 算例

例 利用文献〔3〕中例子1进行直线拟合,有关数值如表1所示.从表可知,由于$u_1 > 2$, $u_6 > 2$(如表中带"*"的数据),选择L_1, L_6可能含有粗差的观测值.按式(9)求得粗差的估值为

$$\Delta_g = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.71 \\ 5.01 \end{bmatrix},$$

$$\hat{X}_{\Delta_g} = 3.8, \qquad \sigma^2_{\Delta} = 0.61, \qquad \sigma_{\Delta} = 0.78.$$

不含粗差时, 参数的最小二乘估计 $\hat{X}_{LS} = 3.8$, $\sigma = 0.83$, 含粗差时的最小二乘估计 $\hat{X}_{LS} = 3.5$, 受粗差的影响较大. 按本文提出的方法, 估计结果与不含粗差时的 LS 估计基本一致, 说明本法排除粗差影响的能力很强.

表 1　直线拟合的粗差估计与平差结果

编号	A	R						X_0	AX_0	Δ_n	L^*	Δ_g
1	1.0	0.990	−0.015	−0.020	−0.035	−0.050	−0.075	4.0	4.0	−0.5	4.5	−4.0
2	1.5		0.980	−0.030	−0.052	−0.075	−0.112	4.0	6.0	0.4	5.6	–
3	2.0			0.960	−0.07	−0.100	−0.150	4.0	8.0	−0.2	8.2	–
4	3.5				0.880	−0.175	−0.262	4.0	14.0	−0.4	14.4	–
5	5.0					0.750	−0.375	4.0	20.0	2.2	17.8	–
6	7.5						0.440	4.0	30.0	1.5	23.3	5.2

编号	L	Δ	$\hat{X}_{LS}$	V	u_i	e_i	Δ_g	$\hat{X}_{\Delta_g}$	V_{Δ_n}
1	8.5	−4.5	3.5	−5.1	2.80*	1　0	−4.71	3.8	0.04
2	5.6	0.4	3.5	−0.4	0.24	0　0	–	–	0.10
3	8.2	−0.2	3.5	−1.3	0.73	0　0	–	–	−0.60
4	14.4	−0.4	3.5	−2.3	1.37	0　0	–	–	−1.10
5	17.8	2.2	3.5	−0.6	0.35	0　0	–	–	1.20
6	23.3	6.7	3.5	2.6	2.13*	0　0	5.01	–	0.19

4　结束语

基于均值移动模型的多个粗差的控测方法, 在理论上是可靠的, 而且在实践中计算简单、计算速度快、结果稳定. 本文对于基于均值移动模型的多个粗差的探测方法, 进行了初步的探讨和研究, 提出一种简单、实用、有效的计算方法, 实现了对多个粗差的定位与估值. 同时, 提出了结果的精度评定方法, 并通过算例证明了该方法的正确性和有效性, 为粗差的定位与估值解决了一个关键性问题.

参　考　文　献

1　朱建军. 测量平差估计准则的统一[J]. 测绘学报, 1986, (4): 308~313

2　王仁谦. 粗差探测与定位的一种新方法[J]. 武测科技, 1994, 4(1): 39~42

3　欧吉坤. 粗差拟准检定法[J]. 测绘学报, 1999, (1): 15~20

A Method for Locating and Estimating Maltidimensional Gross Errors

Wang Renqian

(Dept. of Civil Eng.,, Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　Based on the relation between true error and residual error, the author puts forward a characteristic method for detecting and locating multidimensional gross errors. The method adopts at first the traditional least square error, and then carries out statistical check on residual error of least square error. If there exists gross error, the gross error and unknown parameter can be estimated by new formule of estimation. By this method, the multidimensional gross error can be accurately located and estimated, and the accuracy of estimation can be closely evaluated. It is illustrated by an example of reckoning.

Keywords　gross error, true error, least square, detection of gross error