第 25 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 25　No. 2
2004 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2004

文章编号　1000-5013(2004)02-0133-04

带约束的一类循环和不等式

吴　善　和

(龙岩学院数学系, 福建 龙岩 364012)

摘要　给出一类带约束条件 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$,并含指数参数的循环和不等式. 该不等式有着丰富的内涵,利用它可得到许多有价值的循环和不等式. 给出该不等式的一些特例.

关键词　不等式, 循环和, 约束条件, 幂平均不等式, 算术 - 几何平均不等式

中图分类号　O 178　　**文献标识码**　A

1　问题的提出

循环和不等式在不等式研究中具有重要的地位,长期以来被人们所关注[1~8]. 最近,我们在研究带约束条件的循环和不等式中,发现一类有趣的不等式. 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}^+$, $abcd = 1$,则

$$\frac{abc}{a+b+c+abc} + \frac{bcd}{b+c+d+bcd} + \frac{cda}{c+d+a+cda} + \frac{dab}{d+a+b+dab} \leq 1, \tag{1}$$

$$\frac{abc}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+abc} + \frac{bcd}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}+bcd} + \frac{cda}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}+\sqrt[3]{a}+cda} + \frac{dab}{\sqrt[3]{d}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+dab} \geq 1. \tag{2}$$

更一般地,我们有如下结果.

定理　设 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, $x_{n+j} = x_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, $n \geq 3$, $r > 0$, $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^r x_{i+1}^r \cdots x_{i+n-2}^r}{x_i^\lambda + x_{i+1}^\lambda + \cdots + x_{i+n-2}^\lambda + x_i^r x_{i+1}^r \cdots x_{i+n-2}^r}$. 那么,当 $\lambda \leq -r$ 或 $\lambda \geq \frac{n-2}{2} r$ 时, $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 1$;当 $-r < \lambda \leq \frac{r}{n-1}$ 时, $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 1$.

2　几个引理

引理 1[9]　(幂平均不等式)设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, $p \geq 1$ 或 $p < 0$,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \geq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p. \tag{3}$$

引理 2　设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, p 为实数,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{p}{n-1}}\right) \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{-p}{n-1}}. \tag{4}$$

证明　运用算术-几何平均不等式,得 $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i^p \geq (n-1) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i^{\frac{p}{n-1}}$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 所以 $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i^p\right) \geq (n-1) \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i^{\frac{p}{n-1}}\right)$,即 $\sum_{k=1}^{n} \left(-a_k^p + \sum_{i=1}^{n} a_i^p\right) \geq (n-1) \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^{\frac{-p}{n-1}} \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{p}{n-1}}\right)$. 从而 $(n-1) \sum_{i=1}^{n} a_i^p \geq (n-1) \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{p}{n-1}}\right) \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{-p}{n-1}}$,故

收稿日期　2003-10-24

作者简介　吴善和(1966-),男,高级讲师, 主要从事不等式的研究. E-mail: wushanhe@yahoo.com.cn

基金项目　福建省教育厅自然科学基金资助项目(JB02219)

$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \ge \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{p}{n-1}}\right) \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{-p}{n-1}}$.

引理 3 设 $x_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $n \ge 3$, $r > 0$, $\lambda \le -r$ 或 $\lambda \ge \frac{n-2}{2} r$,则

$$\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\lambda} \ge \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}. \tag{5}$$

证明 分 3 种情况. (Ⅰ) 若 $\lambda \le -r$ 或 $\lambda > (n-1)r$,则

$$\frac{n\lambda}{\lambda-(n-1)r} = 1 + \frac{(n-1)(\lambda+r)}{\lambda-(n-1)r} \ge 1.$$

分别运用引理 1 及算术-几何平均不等式,得

$$\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\lambda} = \sum_{j=0}^{n-2} \left[x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{n\lambda}{\lambda-(n-1)r}} \ge (n-1)^{1-\frac{n\lambda}{\lambda-(n-1)r}} \left[\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{n\lambda}{\lambda-(n-1)r}} =$$
$$(n-1)^{\frac{-(n-1)(\lambda+r)}{\lambda-(n-1)r}} \left[\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{(n-1)(\lambda+r)}{\lambda-(n-1)r}} \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}} \ge$$
$$(n-1)^{\frac{-(n-1)(\lambda+r)}{\lambda-(n-1)r}} \left[(n-1)\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n(n-1)}}\right]^{\frac{(n-1)(\lambda+r)}{\lambda-(n-1)r}} \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}} = \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}.$$

(Ⅱ) 若 $\frac{n-2}{2} r \le \lambda < (n-1)r$,则

$$\frac{-n\lambda}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]} = 1 + \frac{(n-1)[-2\lambda+(n-2)r]}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]} \ge 1.$$

分别运用引理 1,2,得

$$\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\lambda} \ge \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda}{n-2}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{-\lambda}{n-2}} = \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda}{n-2}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} \left[x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{-n\lambda}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]}} \ge$$
$$(n-1)^{1-\frac{-n\lambda}{[\lambda-(n-1)r]}} \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda}{n-2}}\right) \left[\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{-n\lambda}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]}} =$$
$$(n-1)^{\frac{(n-1)[2\lambda-(n-2)r]}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]}} \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda}{n-2}}\right) \left[\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{(n-1)[-2\lambda+(n-2)r]}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]}} \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}} \ge$$
$$(n-1)^{\frac{(n-1)[2\lambda-(n-2)r]}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]}} \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda}{n-2}}\right) \left[(n-1)\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n(n-1)}}\right]^{\frac{(n-1)[-2\lambda+(n-2)r]}{(n-2)[\lambda-(n-1)r]}} \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}} =$$
$$\left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}.$$

(Ⅲ) 若 $\lambda = (n-1)r$,运用算术-几何平均不等式,得

$$\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\lambda} \ge (n-1)\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda}{n-1}} = (n-1)\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{r} = \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}.$$

综合(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),引理 3 得证.

引理 4 设 $x_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $n \ge 3$, $r > 0$, $-r < \lambda \le \frac{r}{n-1}$,则

$$\sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\lambda} \le \left(\prod_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} x_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}. \tag{6}$$

证明 令 $x_{i+j} = \frac{1}{y_{i+j}}$,则欲证式(6)成立,只要证明下面不等式成立. 即

$$\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}} \ge \left(\prod_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right) \sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{-\lambda}. \tag{7}$$

下面分 3 种情况证明不等式(7)成立. (Ⅰ) 若 $-r \le \lambda < 0$,则

$$\frac{-\lambda+(n-1)r}{-n\lambda} = 1 + \frac{(n-1)(\lambda+r)}{-n\lambda} \ge 1.$$

运用引理 1,得

$$\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}} = \sum_{j=0}^{n-2} \left(y_{i+j}^{-\lambda}\right)^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{-n\lambda}} \ge (n-1)^{1-\frac{-\lambda+(n-1)r}{-n\lambda}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{-\lambda}\right)^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{-n\lambda}},$$

所以

$$\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}} \ge (n-1)^{\frac{(n-1)(\lambda+r)}{n\lambda}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{-\lambda}\right)^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{-n\lambda}}.$$

分别运用上面不等式及算术-几何平均不等式,得

$$\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}} = \left[\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{-n\lambda}{-\lambda+(n-1)r}} \left[\sum_{j=0}^{n-2} y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{(n-1)(\lambda+r)}{-\lambda+(n-1)r}} \ge$$

$$(n-1)^{\frac{-(n-1)(\lambda+r)}{-\lambda+(n-1)}}\left(\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}\right)\left[\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{(n-1)(\lambda+r)}{-\lambda+(n-1)r}}\geq$$

$$(n-1)^{\frac{-(n-1)(\lambda+r)}{-\lambda+(n-1)}}\left(\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}\right)\left[(n-1)\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-1)}}\right]^{\frac{(n-1)(\lambda+r)}{-\lambda+(n-1)r}}=\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right)\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}.$$

(Ⅱ) 若 $0<\lambda\leq\frac{r}{n-1}$,则

$$\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)\lambda}=1+\frac{(n-1)[r-(n-1)\lambda]}{n(n-2)\lambda}\geq 1.$$

分别运用引理 1,2 得

$$\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\geq\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)}}\right)\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n(n-2)}}=\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)}}\right)\sum_{j=0}^{n-2}\left(y_{i+j}^{-\lambda}\right)^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)\lambda}}\geq$$

$$(n-1)^{1-\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)\lambda}}\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)}}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}\right)^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)\lambda}}.$$

所以

$$\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\geq(n-1)^{\frac{(n-1)[(n-1)\lambda-r]}{n(n-2)\lambda}}\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)}}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}\right)^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-2)\lambda}}.$$

分别运用上面不等式及算术-几何平均不等式,得

$$\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}=\left[\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{n(n-2)\lambda}{-\lambda+(n-1)r}}\left[\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{(n-1)[r-(n-1)\lambda]}{-\lambda+(n-1)r}}\geq$$

$$(n-1)^{\frac{-(n-1)[r-(n-1)\lambda]}{-\lambda+(n-1)r}}\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}\right)\left[\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}\right]^{\frac{(n-1)[r-(n-1)\lambda]}{-\lambda+(n-1)r}}\geq$$

$$(n-1)^{\frac{-(n-1)[r-(n-1)\lambda]}{-\lambda+(n-1)r}}\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}\right)\left[(n-1)\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n(n-1)}}\right]^{\frac{(n-1)[r-(n-1)\lambda]}{-\lambda+(n-1)r}}=$$

$$\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right)\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}.$$

(Ⅲ) 若 $\lambda=0$,运用算术-几何平均不等式,得

$$\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}=\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{(n-1)r}{n}}\geq(n-1)\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{r}{n}}=\left(\prod_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{\frac{\lambda+r}{n}}\right)\sum_{j=0}^{n-2}y_{i+j}^{-\lambda}.$$

综合(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)**知不等式**(7)**成立,从而引理 4 得证.**

3　定理的证明

由条件式 $x_1x_2\cdots x_n=1$, $x_{n+j}=x_j(j=1,2,\cdots,n)$,**得**

$$x_ix_{i+1}\cdots x_{i+n-1}=1,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

所以,$x_ix_{i+1}\cdots x_{i+n-2}=x_{i+n-1}^{-1}(i=1,2,\cdots,n)$.**下述分为两种情形.**

(Ⅰ) 若 $\lambda\leq -r$ 或 $\lambda\geq\frac{n-2}{2}r$,运用引理 3,得

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leq$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_ix_{i+1}\cdots x_{i+n-2})^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}}{x_i^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+x_{i+1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+\cdots+x_{i+n-2}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+(x_ix_{i+1}\cdots x_{i+n-2})^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+n-1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}}{x_i^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+x_{i+1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+\cdots+x_{i+n-2}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+x_{i+n-1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}}=1.$$

(Ⅱ) 若 $-r<\lambda\leq\frac{r}{n-1}$,运用引理 4,得

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_ix_{i+1}\cdots x_{i+n-2})^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}}{x_i^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+x_{i+1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+\cdots+x_{i+n-2}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+(x_ix_{i+1}\cdots x_{i+n-2})^{\frac{-\lambda+(n-1)r}{n}}}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+n-1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}}{x_i^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+x_{i+1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+\cdots+x_{i+n-2}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}+x_{i+n-1}^{\frac{\lambda-(n-1)r}{n}}}=1.$$

综合(Ⅰ) ,(Ⅱ) ,定理得证.

4 定理的应用

运用定理,即得如下形式优美的循环和不等式.

推论 1 设 $a, b, c, r \in \mathbf{R}^+$, $abc = 1$, $F(a, b, c) = \frac{a^r b^r}{a^\lambda + b^\lambda + a^r b^r} + \frac{b^r c^r}{b^\lambda + c^\lambda + b^r c^r} + \frac{c^r a^r}{c^\lambda + a^\lambda + c^r a^r}$,则当 $\lambda \leq - r$ 或 $\lambda \geq \frac{r}{2}$ 时, $F(a, b, c) \leq 1$;当 $- r < \lambda < \frac{r}{2}$ 时, $F(a, b, c) \geq 1$.

推论 2 设 $a, b, c, d, r \in \mathbf{R}^+$, $abcd = 1$, $F(a, b, c, d) = \frac{a^r b^r c^r}{a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + a^r b^r c^r} + \frac{b^r c^r d^r}{b^\lambda + c^\lambda + d^\lambda + b^r c^r d^r} + \frac{c^r d^r a^r}{c^\lambda + d^\lambda + a^\lambda + c^r d^r a^r} + \frac{d^r a^r b^r}{d^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + d^r a^r b^r}$. 那么,当 $\lambda \leq - r$ 或 $\lambda \geq r$ 时, $F(a, b, c, d) \leq 1$;当 $- r < \lambda \leq \frac{r}{3}$ 时, $F(a, b, c, d) \geq 1$.

在推论 2 中分别令 $\lambda = 1, r = 1$ 及 $\lambda = \frac{1}{3}$, $r = 1$,便得到不等式(1) ,(2) .

此外,在推论 2 中令 $d = 1$,又得

推论 3 设 $a, b, c, r \in \mathbf{R}^+$, $abc = 1$, $F(a, b, c) = \frac{a^r b^r}{a^r b^r + a^\lambda + b^\lambda + 1} + \frac{b^r c^r}{b^r c^r + b^\lambda + c^\lambda + 1} + \frac{c^r a^r}{c^r a^r + c^\lambda + a^\lambda + 1} + \frac{1}{a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + 1}$. 那么,当 $\lambda \leq - r$ 或 $\lambda \geq r$ 时, $F(a, b, c) \leq 1$;当 $- r < \lambda \leq \frac{r}{3}$ 时, $F(a, b, c) \geq 1$.

本文定理的内涵十分丰富,对其中的参数 λ, r 取不同值,可得到许多颇有价值的循环和不等式. 限于篇幅,在此不再列举.

参 考 文 献

1 Mitrinović D S ,Vasić P M 著. 分析不等式[M]. 赵汉宾译. 南宁:广西人民出版社,1986. 176～184

2 文家金,王挽澜,周海燕. Janous 型的一类循环不等式[J]. 成都大学学报(自然科学版),2003,22(1):25～29

3 吴善和. Weierstrass 不等式的加强与推广[J]. 广西师范学院学报(自然科学版),2003,20(1):17～22

4 吴善和. 一类分式不等式的推广及应用[J]. 苏州科技学院学报(自然科学版),2003,20(2):60～64

5 Wang Wanlan ,Wang Jinqian. Some remarks of inequalities involving cyclic sums[J]. Journal of Chengdu University (Natural Science) ,2002, 21 (1):1～4

6 Baston V J D. On a cyclic sum of Mordell[J]. ActaArith ,1965,(11): 133～146

7 Diananda P. H. Inequalities for some cyclic sums[J]. J. London Math. Soc. ,1963, (38): 60～62

8 Zulauf A. Note on an inequality[J]. Math. Gaz. ,1962, (46): 41～42

9 王向东,苏化明,王方汉. 不等式及其理论和方法[M]. 郑州:河南教育出版社,1994. 387～388

A Class of Cyclic Sum Inequalities with Constraint

Wu Shanhe

(Dept. of Math. , Longyan College , 364012 , Longyan , China)

Abstract The author give here a class of cyclic sum inequalities with constraint condition $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ which contain also exponential parameter. These inequalities are rich in connotation. By making use of them, a lot of valuable cyclic sum inequalities can be obtained. Some special cases of these inequalities are given finally.

Keywords inequality , cyclic sum , constraint condition , power mean inequality , arithmetic-geometric mean inequality