

关于合同变换矩阵的一般形式

宋 海 洲

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 对给定的合同的实对称 n 阶阵 A 和 B , 给出其复合同变换的一般表示形式.

关键词 合同变换矩阵, 矩阵合同, 可逆矩阵

中图分类号 O 151. 21

文献标识码 A

给定 n 阶实对称阵 A 和 B , 如果存在 n 阶可逆复方阵 P , 使得 $P'AP = B$. 那么, 称 A 与 B 合同, 称 P 为合同变换矩阵. 记 $S_0(A, B) = \{C | C'AC = B, A, B \text{ 为已知的实对称阵}, C \text{ 为可逆复矩阵}\}$, $S_c(A, B) = \{C^{-1}C_1 | C \text{ 为 } S_0(A, B) \text{ 中任意一给定矩阵}, C_1 \in S_0(A, B)\}$. 对于给定 n 阶实对称阵 A 和 B , 只要 A, B 的正负惯性指标都一样, 则 $S_0(A, B), S_c(A, B)$ 都非空, 但 $S_0(A, B)$ 的元素个数一般并不唯一. 文 [1], [2] 讨论了相似变换矩阵的一般形式. 本文试讨论在 n 阶实对称阵 A 和 B 的正负惯性指标都一样的情形下, 所有 A 到 B 的合同变换矩阵构成的集合 $S_0(A, B)$ 的一般表示形式.

1 $S_c(A, B)$ 的表示

为了方便起见, 我们先给出如下定义.

定义 1 如果一个 n 阶复方阵 P , 满足 $P'P = E$, 我们称 P 为复直交矩阵.

显然, 当 P 为实矩阵时, P 就是通常意义下的正交矩阵^[3]. 从而, 复直交矩阵是实正交矩阵的推广. 首先我们有如下定理 1 及引理 1.

定理 1 假设实对称阵 A 和 B 的正负惯性指标都一样, 则 $S_c(A, B)$ 为群.

证明 对于任意的 $P_1 \in S_c(A, B), P_2 \in S_c(A, B)$, 则存在 $C_1 \in S_0(A, B), C_2 \in S_0(A, B)$, 使得 $P_1 = C^{-1}C_1, P_2 = C^{-1}C_2$. 因此 $P_1 \cdot P_2 = (C^{-1}C_1) \cdot (C^{-1}C_2) = C^{-1} \cdot (C_1C^{-1}C_2)$. 而 $(C_1C^{-1}C_2)'A(C_1C^{-1}C_2) = C_2'(C^{-1})'C_1'AC_1C^{-1}C_2 = C_2'(C^{-1})'BC^{-1}C_2 = C_2'AC_2 = B$, 则 $C_1C^{-1}C_2 \in S_0(A, B)$. 所以 $P_1 \cdot P_2 \in S_c(A, B)$, 亦即有 $S_c(A, B)$ 关于矩阵乘法封闭. 易知 $S_c(A, B)$ 关于矩阵乘法满足结合律, 有么元为单位矩阵. 下证每个元素都有逆元. 假设 $P \in S_c(A, B)$, 则存在 $C_1 \in S_0(A, B)$, 使得 $P = C^{-1}C_1$, 所以 $P^{-1} = C_1^{-1}C = C^{-1}(CC_1^{-1}C)$. 因 $(CC_1^{-1}C)'A(CC_1^{-1}C) = C'(C_1^{-1})'C'ACC_1^{-1}C = C'(C_1^{-1})'BC_1^{-1}C = C'AC = B$, 则 $CC_1^{-1}C \in S_0(A, B)$. 所以, $C_1^{-1}C \in S_c(A, B)$, 即 $P^{-1} \in S_c(A, B)$. 综上所述, $S_c(A, B)$ 成群.

引理 1 假设实对称阵 A 和 B 的正负惯性指标都一样, 则 $S_c(A, B)$ 有表示为 $S_c(A, B) = \{M | M'BM = B, M \text{ 为可逆复矩阵}\}$.

证明 $M \in S_c(A, B) \Leftrightarrow CM \in S_0(A, B) \Leftrightarrow (CM)'ACM = B, M \text{ 可逆} \Leftrightarrow M'BM = B, M \text{ 可逆}$.

当 B 为对角阵时, $S_c(A, B)$ 进一步表示如下两个定理.

定理 2 假设实对称阵 A 和 B 的正负惯性指标都一样, 且 $B = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, -\lambda_{r+1}, \dots, -\lambda_n] (\lambda_i > 0)$,

$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n], G = \Lambda^{-\frac{1}{2}}, U = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & iE_{n-r} \end{bmatrix}$, 则 $S_c(A, B) = \{UGPG^{-1}U^{-1} | P \text{ 为任意}$

的复直交矩阵/.

证明 由引理 1 得 $M \in S_c(A, B) \Leftrightarrow M'BM = B, M$ 可逆. 等价于 $U'M'BMU = U'BU = \Lambda, M$ 可逆. 等价于 $GU'M'BMUG = E, M$ 可逆. 等价于 $GU'M'(U)^{-1}\Lambda U^{-1}MUG = E, M$ 可逆. 等价于 $GU'M'(U^{-1})'G^{-1}G^{-1}U^{-1}MUG = E, M$ 可逆. 等价于 $(G^{-1}U^{-1}MUG)'(G^{-1}U^{-1}MUG) = E, M$ 可逆. 等价于 $G^{-1}U^{-1}MUG$ 记为 P, P 为复直交矩阵. 等价于 $M = UGPG^{-1}U^{-1}$ (P 为复直交矩阵).

定理 3 设实对称阵 A, B 的正负惯性指标都一样, 且 $B = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, -\lambda_{r+1}, \dots, -\lambda_{r+s}, 0, \dots, 0] (r+s < n, \lambda_i > 0)$. 记 $B_1 = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}]$, $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}]$, $G = \Lambda^{-\frac{1}{2}}, U = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & iE_s \end{bmatrix}$. 那么,

$$S_c(A, B) = \left\{ M = \begin{bmatrix} UGPG^{-1}U^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} M_{21} \text{ 为任意的 } (n-r-s) \times (r+s) \text{ 阶复矩阵} \\ P \text{ 为任意的 } r+s \text{ 阶复直交矩阵} \\ M_{22} \text{ 为任意的 } n-r-s \text{ 阶可逆复方阵} \end{array} \right. \right\}.$$

证明 设 M 分块成 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, 其中 M_{11} 为 $(r+s)$ 阶复方阵, M_{22} 为 $n-r-s$ 复阶方阵. 由引理 1 得 $M \in S_c(A, B) \Leftrightarrow M'BM = B, M$ 可逆. 等价于 $\begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M$ 可逆. 等价于 $\begin{bmatrix} M'_{11}B_1M_{11} & M'_{11}B_1M_{12} \\ M'_{12}B_1M_{11} & M'_{12}B_1M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M$ 可逆. 等价于 $\begin{cases} M'_{11}B_1M_{11} = B_1, M'_{11}B_1M_{12} = 0 \\ M'_{12}B_1M_{11} = 0, M'_{12}B_1M_{12} = 0 \end{cases}$, 且 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ 可逆. 等价于 $\begin{cases} M'_{11}B_1M_{11} = B_1 \\ M'_{11}B_1M_{12} = 0 \text{ 且 } M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \text{ 可逆} \\ M'_{12}B_1M_{12} = 0 \end{cases}$ 可逆. 等价于 $\begin{cases} M'_{11}B_1M_{11} = B_1 \\ B_1M_{12} = 0 \text{ 且 } M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \text{ 可逆} \\ M'_{12}B_1M_{12} = 0 \end{cases}$ 可逆. 等价于 $\begin{cases} M'_{11}B_1M_{11} = B_1 \\ B_1M_{12} = 0 \end{cases}$ 且 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ 可逆和 M_{11} 可逆. 等价于 $\begin{cases} M'_{11}B_1M_{11} = B_1 \\ B_1M_{12} = 0 \end{cases}$, 且 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ 可逆. 等价于 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$. M_{22} 为 $n-r-s$ 阶可逆复方阵, M_{21} 为任意 $(n-r-s) \times (r+s)$ 阶复矩阵. 且 $M'_{11}B_1M_{11} = B_1 \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} UGPG^{-1}U^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, 其中 M_{22} 为 $(n-r-s)$ 阶可逆复方阵, M_{21} 为 $(n-r-s) \times (r+s)$ 阶复矩阵, P 为 $r+s$ 阶的任意复直交矩阵 (定理 2). 故定理得证.

2 $S_0(A, B)$ 的表示

定理 4 假设实对称阵 A 和 B 的正负惯性指标都一样, 记 $S_0(A, B) = \{C | C'AC = B, A \text{ 和 } B \text{ 为给定的实对称阵}, C \text{ 为可逆复矩阵}\}$. 设可逆矩阵 K , 使得 $K'BK = \begin{bmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & -E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} B_2$. 设 D 为某给定的矩阵, 而且满足 $D'AD = B_2$, 可记 $S_0(A, B_2) = \{C | C'AC = B_2, C \text{ 为可逆复矩阵}\}$, $S_D(A, B_2) = \{D^{-1}D_1 | D_1 \in S_0(A, B_2)\}$. 记 $U = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & iE_s \end{bmatrix}$, 则

$$S_0(A, B) = \left\{ DMK^{-1} \mid M = \begin{bmatrix} UPU^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} M_{21} \text{ 为任意复矩阵} \\ M_{22} \text{ 为任意 } n-r-s \text{ 阶可逆复方阵} \\ P \text{ 为任意 } r+s \text{ 阶复直交矩阵} \end{array} \right. \right\}.$$

证明 $C \in S_0(A, B) \Leftrightarrow C'AC = B$, 且 C 可逆. 又 K 使得 $K'BK = B_2$, 则 $C \in S_0(A, B) \Leftrightarrow K'CACK = B_2, C$

可逆 $\Leftrightarrow (CK)'ACK = B_3$ 且 C 可逆 $\Leftrightarrow CK \in S_0(A, B_2)$. 由于 D 为给定的矩阵且满足 $D'AD = B_2$ 由定理3得 $S_D(A, B_2) = \left\{ M = \begin{bmatrix} UPU^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} P \text{ 为 } r+s \text{ 阶复直交矩阵, } M_{21} \text{ 为任意的 } (n-r-s) \times (r+s), \\ \text{阶复方阵 } M_{22} \text{ 为任意的 } n-r-s \text{ 阶可逆复方阵} \end{array} \right\}.$

而 $CK \in S_0(A, B_2) \Leftrightarrow D^{-1}CK \in S_D(A, B_2) \Leftrightarrow D^{-1}CK = M = \begin{bmatrix} UPU^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow C = DMK^{-1}$. 其中 $M =$

$\begin{bmatrix} UPU^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$. 故 $C \in S_0(A, B) \Leftrightarrow C = DMK^{-1}$, $M = \begin{bmatrix} UPU^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$. $S_0(A, B) = \left\{ DMK^{-1} \middle| M = \begin{bmatrix} UPU^{-1} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} M_{21} \text{ 为任意复矩阵, } M_{22} \text{ 为任意 } n-r-s \text{ 阶可逆复方阵} \\ P \text{ 为任意 } r+s \text{ 阶复直交矩阵} \end{array} \right\}.$

3 数值例子

例1 求 $S_0(A, B)$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

解 因为 $K = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, 有 $K'BK = E_3$. $D = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{24} \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{24} \end{bmatrix}$, 有 $D'AD = E_3$, $U =$

E_3 . 故利用定理4得 $S_0(A, B) = \{DUPU^{-1}K^{-1} \mid P \text{ 为任意复直交阵}\} = \{DPK^{-1} \mid P \text{ 为任意复直交阵}\}$. 不难验证 $(DPK^{-1})'ADPK^{-1} = (K^{-1})'P'DADPK^{-1} = (K^{-1})'P'E_3PK^{-1} = (K^{-1})'P'PK^{-1} = B$. 所以 $DPK^{-1} \in S_0(A, B)$

例2 求 $S_0(A, B)$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

解 取 $K = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, 则 $K'BK = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_1 \end{bmatrix}$. 取 $D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, 有 $D'AD =$

$\begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_1 \end{bmatrix}$. 令 $U = \text{diag}[1, 1, i]$ 则由定理4得 $S_0(A, B) = \{DUPU^{-1}K^{-1} \mid P \text{ 为任意复直交阵}\}$.

参 考 文 献

- 1 林春艳. 关于矩阵相似变换矩阵的一般形式[J]. 工科数学, 2001, (3): 85~88
- 2 金 辉. 相似变换矩阵的空间结构探讨[J]. 工科数学, 2001, (4): 93~96
- 3 张远达. 线性代数原理[M]. 上海: 上海教育出版社, 1981. 269~338

General Form of the Change of Matrix in Congruent Matrices

Song Haizhou

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract For given congruent real symmetric matrices A and B of n th order, the author gives here the general form of their complex congruent transformation.

Keywords matrix of congruent transformation, congruence of matrices, reversible matrix