第25卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.25 No.2
2004年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2004

文章编号 1000-5013(2004)02-0126-04

Beurling-Ahlfors 延拓的伸张函数之估计

龙波涌 黄心中

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 研究实轴 $\mathbf{R}^1$ 上的保向同胚映照到上半平面 Beurling-Ahlfors 延拓的伸张函数的性质. 通过证明几个不等式, 对伸张函数 $D(z)$ 作进一步的估计, 改进了相关的结果.

关键词 Beurling-Ahlfors 延拓, 伸张函数, 拟对称函数

中图分类号 O 174.51 文献标识码 A

1 预备知识及背景介绍

设 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}^1$ 上的保向同胚映照, 且满足 $h(+\infty)=+\infty$, $h(-\infty)=-\infty$. 称

$$\rho(x,t)=\max\left\{\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)},\ \frac{h(x)-h(x-t)}{h(x+t)-h(x)}\right\},\qquad x\in\mathbf{R},\quad t\in\mathbf{R}^+$$

为由 $h(x)$ 生成的拟对称函数. $h(x)$ 从 $\mathbf{R}^1$ 到上半平面 $H=\{z:\ \mathrm{Im}z>0\}$ 上的Beurling-Ahlfors延拓为 $\varphi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 其中

$$u(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\,\mathrm{d}t,\qquad v(x,y)=\frac{1}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}h(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\,\mathrm{d}t\right).\tag{1}$$

称 $D(z)=\dfrac{|\varphi_z|+|\varphi_{\bar z}|}{|\varphi_z|-|\varphi_{\bar z}|}$ 为 $\varphi(z)$ 的伸张函数. 由文[1]知, 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, $t\in\mathbf{R}^+$, $\rho(x,t)$ 有界, 则 $\varphi(z)$ 是 H 上的拟共形映照. 但当 $\rho(x,t)$ 没有界时, $\varphi(z)$ 就不再是拟共形映照. 一个有趣的问题是, 对 $D(z)$ 到底有什么样的估计. 该问题引起了许多的专家与学者的关注. 从拟共形映照理论中的 Beurling-Ahlfors 延拓来看, 有理由推断 $D(z)$ 的上界必定与 $\rho(x,t)$ 有密切的联系, 并被现有的文[2~4]所证实. 为了进一步证明, 令 $\alpha(x,t)=h(x+t)-h(x)$, $\beta(x,t)=h(x)-h(x-t)$, 及

$$A(x,t)=\frac{1}{t}\int_0^t\alpha(x,u)\,\mathrm{d}u,\qquad B(x,t)=\frac{1}{t}\int_0^t\beta(x,u)\,\mathrm{d}u,\tag{2}$$

其中 $x\in\mathbf{R}$, $t\in\mathbf{R}^+$. 由 $h(x)$ 的单调性, 立即有关系式 $0<A(x,t)<\alpha(x,t)$, $0<B(x,t)<\beta(x,t)$. 那么, 有 $0<\dfrac{A(x,t)}{\alpha(x,t)}<1$, $0<\dfrac{B(x,t)}{\beta(x,t)}<1$. 在上述记号下, 由文[4]得到以下定理.

定理A 设 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}^1$ 上保向同胚映照, 且满足 $h(+\infty)=+\infty$, $h(-\infty)=-\infty$. $\varphi(z)$ 是 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 延拓, $D(z)$ 为 $\varphi(z)$ 的伸张函数, 则

$$D(x,y)\leqslant\frac{(\alpha^2+\beta^2+(\alpha-A)^2+(\beta-B)^2)/\alpha\beta}{2-\dfrac{A}{\alpha}-\dfrac{B}{\beta}},\tag{3}$$

式中 $\alpha=\alpha(x,y)$, $\beta=\beta(x,y)$.

定理B 满足定理 A 中条件的伸张函数 $D(z)$ 估计为

$$D(x,y)\leqslant 4(\rho(x,y)+1),\tag{4}$$

收稿日期 2003-11-17

作者简介 龙波涌(1974-), 男, 硕士研究生, 主要从事函数论的研究. E-mail: lbymxy@163.com

基金项目 国务院侨务办公室重点科研基金资助项目(01QZR01)

或

$$D(x,y)\leqslant\frac{5}{8}(\rho(x,y)+1)\left(\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+\rho\left(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+2\right).\tag{5}$$

在定理 A 的条件下，记 $G(x)=\limsup_{y\to0^+}\frac{D(x,y)}{\rho(x,y)}$，$x\in\mathbf{R}$. 文[4]进一步证明了下列定理.

定理 C　$G(x)$本性有界，且 $\|G(x)\|_\infty\leqslant8$.

本文在定理 A 的基础上，将对伸张函数 $D(z)$作进一步的估计，改进定理 B 与定理 C 的结果.

2　几个不等式

在上节定义及记号下，我们先推导出几个有用的不等式. 由 $\rho(x,y)$的定义，有 $\rho^{-1}\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)\leqslant\frac{h(x+y)-h\left(x+\frac{y}{2}\right)}{h\left(x+\frac{y}{2}\right)-h(x)}\leqslant\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)$. 经变形，可得

$$\frac{\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)}{1+\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)}\alpha(x,y)\geqslant h\left(x+\frac{y}{2}\right)-h(x)\geqslant\frac{1}{1+\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)}\alpha(x,y).\tag{6}$$

由定义，有 $A(x,y)=\frac{1}{y}\left(\int_0^{\frac{y}{2}}(h(x+u)-h(x))\mathrm{d}u+\int_{\frac{y}{2}}^{y}(h(x+u)-h(x))\mathrm{d}u\right)$. 再由 $h(x)$的单调性，可得 $A(x,y)\geqslant\frac{1}{2}(h(x+0)-h(x))+\frac{1}{2}\left(h\left(x+\frac{y}{2}\right)-h(x)\right)=\frac{1}{2}\left(h\left(x+\frac{y}{2}\right)-h(x)\right)$, $A(x,y)\leqslant\frac{1}{2}\left(h\left(x+\frac{y}{2}\right)-h(x)\right)+\frac{1}{2}(h(x+y)-h(x))$, 则

$$\frac{1}{2}\left(h\left(x+\frac{y}{2}\right)-h(x)\right)\leqslant A(x,y)\leqslant\frac{1}{2}h\left(x+\frac{y}{2}\right)-h(x))+\frac{1}{2}\alpha(x,y).\tag{7}$$

综合式(6)和式(7)，有

$$\frac{1}{2\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+2}\leqslant\frac{A(x,y)}{\alpha(x,y)}\leqslant\frac{2\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+1}{2\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+2}.\tag{8}$$

同理, 可得

$$\frac{1}{2\rho\left(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+2}\leqslant\frac{B(x,y)}{\beta(x,y)}\leqslant\frac{2\rho\left(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+1}{2\rho\left(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+2}.\tag{9}$$

3　主要结果及证明

定理1　设$h(x)$是实轴$\mathbf{R}^1$上保向同胚映照, 且满足$h(+\infty)=+\infty$, $h(-\infty)=-\infty$. $\varphi(z)$是$h(x)$的 Beurling-Ahlfors 延拓，$D(z)$为 $\varphi(z)$的伸张函数，则

$$D(x,y)\leqslant\frac{32}{9}(\rho(x,y)+1),\tag{10}$$

或

$$D(x,y)\leqslant\frac{73}{128}(\rho(x,y)+1)\left(\rho\left(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+\rho\left(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+2\right).\tag{11}$$

证明　记 $\rho=\rho(x,y)$，$\alpha=\alpha(x,y)$，$\beta=\beta(x,y)$. 以下分几种进行情况讨论. (1) 情况 1. $\frac{A}{\alpha}<\frac{7}{16}$时, 考虑式(3)，有

$$D(x,y)\leqslant\frac{2(\alpha^2+\beta^2)/\alpha\beta}{2-\frac{7}{16}-1}\leqslant\frac{2(\rho+\frac{1}{\rho})}{\frac{9}{16}}\leqslant\frac{32}{9}(\rho+1).$$

(2) 情况2. $\frac{7}{16}\leqslant\frac{A}{\alpha}<\frac{5}{8}$时,再分两种情况.(a) 当$\frac{7}{16}\leqslant\frac{A}{\alpha}<\frac{5}{8}$且$\frac{B}{\rho}<\frac{3}{4}$时,有

$$D(x,y)\leqslant\frac{2(\alpha^2+\beta^2)/\alpha\beta}{2-\frac{5}{8}-\frac{3}{4}}\leqslant\frac{2(\rho+\frac{1}{\rho})}{\frac{5}{8}}\leqslant\frac{16}{5}(\rho+1).$$

(b) 当$\frac{7}{16}\leqslant\frac{A}{\alpha}<\frac{5}{8}$且$\frac{B}{\rho}\geqslant\frac{3}{4}$时,有$(\alpha-A)^2\leqslant(\frac{9}{16}\alpha)^2$,$(\beta-B)^2\leqslant(\frac{1}{4}\beta)^2$. 由式(3),则有

$$D(x,y)\leqslant\frac{(\alpha^2+\beta^2+(\frac{9}{16}\alpha)^2+(\frac{1}{4}\beta)^2)/\alpha\beta}{2-\frac{5}{8}-1}\leqslant\frac{\frac{337}{256}(\rho+\frac{1}{\rho})}{\frac{3}{8}}\leqslant\frac{337}{96}(\rho+1).$$

(3) 情况3. $\frac{5}{8}\leqslant\frac{A}{\alpha}\leqslant\frac{15}{16}$时,再分3种情况.(a) 当$\frac{5}{8}\leqslant\frac{A}{\alpha}\leqslant\frac{15}{16}$且$\frac{B}{\rho}<\frac{1}{2}$时,有

$$D(x,y)\leqslant\frac{2(\alpha^2+\beta^2)/\alpha\beta}{2-\frac{1}{2}-\frac{15}{16}}\leqslant\frac{2(\rho+\frac{1}{\rho})}{\frac{9}{16}}\leqslant\frac{32}{9}(\rho+1).$$

(b) 当$\frac{5}{8}\leqslant\frac{A}{\alpha}\leqslant\frac{15}{16}$且$\frac{1}{2}\leqslant\frac{B}{\rho}\leqslant\frac{5}{8}$时,则有

$$D(x,y)\leqslant\frac{(\alpha^2+\beta^2+(\frac{3}{8}\alpha)^2+(\frac{1}{2}\beta)^2)/\alpha\beta}{2-\frac{15}{16}-\frac{5}{8}}\leqslant\frac{20}{7}(\rho+1).$$

(c) 当$\frac{5}{8}\leqslant\frac{A}{\alpha}\leqslant\frac{15}{16}$且$\frac{B}{\rho}>\frac{5}{8}$时,有$(\alpha-A)^2\leqslant(\frac{3}{8}\alpha)^2$,$(\beta-B)^2<(\frac{3}{8}\beta)^2$. 由式(3)和不等式(8),(9)有

$$D(x,y)\leqslant\frac{(\alpha^2+\beta^2+(\frac{3}{8}\alpha)^2+(\frac{3}{8}\beta)^2)/\alpha\beta}{2-\frac{A}{\alpha}-\frac{B}{\beta}}\leqslant$$

$$\frac{73}{64}(\rho+\frac{1}{\rho})/(2-\frac{2\rho(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2})+1}{2\rho(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2})+2}-\frac{2\rho(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2})+1}{2\rho(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2})+2})\leqslant$$

$$\frac{73}{128}(\rho(x,y)+1)(\rho(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2})+\rho(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2})+2).$$

(4) 情况4. $\frac{A}{\alpha}>\frac{15}{16}$时,再分4种情况.(a) 当$\frac{A}{\alpha}>\frac{15}{16}$且$\frac{B}{\rho}<\frac{7}{16}$时,$D(x,y)\leqslant\frac{2(\alpha^2+\beta^2)/\alpha\beta}{2-1-\frac{7}{16}}<\frac{2(\rho+\frac{1}{\rho})}{\frac{9}{16}}$ $\leqslant\frac{32}{9}(\rho+1)$.(b) 当$\frac{A}{\alpha}>\frac{15}{16}$且$\frac{7}{16}\leqslant\frac{B}{\rho}<\frac{5}{8}$时,$D(x,y)\leqslant\frac{(\alpha^2+\beta^2+(\frac{1}{16}\alpha)^2+(\frac{9}{16}\beta)^2)/\alpha\beta}{2-1-\frac{5}{8}}\leqslant\frac{337}{96}(\rho+1)$.

(c) 当$\frac{A}{\alpha}>\frac{15}{16}$且$\frac{5}{8}\leqslant\frac{B}{\rho}<\frac{11}{16}$时,有$D(x,y)\leqslant\frac{73}{128}(\rho(x,y)+1)(\rho(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2})+\rho(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2})+2)$.

(d) 当$\frac{A}{\alpha}>\frac{15}{16}$且$\frac{B}{\rho}\geqslant\frac{11}{16}$时,$D(x,y)\leqslant\frac{281}{512}(\rho(x,y)+1)(\rho(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2})+\rho(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2})+2)$. 综上所叙,定理获证.

注 利用我们的方法,还可以对$D(z)$的估计作些改进,但其改进幅度是较小的.

若记$\rho^+=\rho(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2})$,$\rho^-=\rho(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2})$,$\rho^*=\max\{\rho^+,\rho^-\}$,由式(3)及不等式(8),(9),有

$$D(x,y)\leqslant\frac{\left(\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha-\frac{1}{2\rho^{+}+2}\alpha\right)^2+\left(\beta-\frac{1}{2\rho^{-}+2}\beta\right)^2\right)/\alpha\beta}{2-\frac{2\rho^{+}+1}{2\rho^{+}+2}-\frac{2\rho^{-}+1}{2\rho^{-}+2}}\leqslant$$

$$\frac{\left(\alpha^2+\beta^2+\left(1-\frac{1}{2\rho^{*}+2}\right)^2\alpha^2+\left(1-\frac{1}{2\rho^{*}+2}\right)^2\beta^2\right)/\alpha\beta}{2-\frac{2\rho^{*}+1}{2\rho^{*}+2}-\frac{2\rho^{*}+1}{2\rho^{*}+2}}\leqslant$$

$$\left(1+\left(\frac{2\rho^{*}+1}{2\rho^{*}+2}\right)^2\right)\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\left(\rho^{*}+1\right)\leqslant\left(1+\left(\frac{1+2\rho^{*}}{2+2\rho^{*}}\right)^2\right)\left(\rho^{*}+1\right)(\rho+1).$$

那么,实际上我们又得到了下面定理.

定理 2　设 $D(z)$ 满足定理 1 中的条件, 则

$$D(x,y)\leqslant\left(1+\left(\frac{1+2\rho^{*}}{2+2\rho^{*}}\right)^2\right)\left(\rho^{*}+1\right)(\rho+1).\tag{12}$$

式中 $\rho^{*}=\max\{\rho(x+\frac{y}{2},\frac{y}{2}),\ \rho(x-\frac{y}{2},\frac{y}{2})\}$, $\rho=\rho(x,y)$.

对定理 C, 我们可以改进为如下定理.

定理 3　$\|G(x)\|_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}}|G(x)|\leqslant 4.$

证明　令 $E=\{x\in\mathbf{R}: h(x)$ 在 x 点有有限的导数$\}$, 则由 $h(x)$ 的条件可得 $\mathrm{mes}\{\mathbf{R}-E\}=0$. 对于 E 中的点 x, 在文[4]定理 C 的证明中, 得到当 $h'(x)>0$ 时, 有 $\lim\limits_{y\to0^{+}}\sup\frac{D(x,y)}{\rho(x,y)}\leqslant\frac{5}{2}$. 当 $h'(x)=0$ 时, 对充分小的 $y>0$, 有 $A(x,y)\leqslant\frac{1}{2}\alpha(x,y)$, 即 $\frac{A(x,y)}{\alpha(x,y)}\leqslant\frac{1}{2}$ 成立. 其实同理可证, 在此种情况下, $B(x,y)\leqslant\frac{1}{2}\beta(x,y)$, 即 $\frac{B(x,y)}{\beta(x,y)}\leqslant\frac{1}{2}$ 成立. 则考虑式(3), 有

$$\frac{D(x,y)}{\rho(x,y)}\leqslant\frac{\left(\alpha^2+\beta^2+(\alpha-A)^2+(\beta-B)^2\right)/\alpha\beta\rho}{2-\frac{A}{\alpha}-\frac{B}{\beta}}\leqslant\frac{2(\alpha^2+\beta^2)/\alpha\beta\rho}{2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\leqslant2\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\leqslant4.$$

综上所叙, 可得 $\|G(x)\|_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}}|G(x)|\leqslant4.$

参　考　文　献

1　Ahlfors L V. Lectures on Quasiconformal Mappings[M]. New York: Nostrand Company, 1966. 63~73

2　Lehtinen M. The dilatation of Beurling-Ahlfors extension of quasisymmetric functions[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math., 1983, 8(1): 187~191

3　Chen Jixiu, Chen Zhiguo, He Chengqi. Boundary Correspondence under $u(z)$-Homeomorphisms[J]. Michigan Math. J., 1996, 43: 211~220

4　郑学良. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数与 ID-同胚[J]. 数学学报, 2002, 45(5): 1 035~1 040

Estimating Dilatation Function of Beurling-Ahlfors Extension

Long Boyong　　Huang Xinzhong

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　With regard to Beurling-Ahlfors extension from sense-preserving homeomorphism on real axis $\mathbf{R}^1$ to the upper half plane, the authors make a study on the properties of its dilatation function; and form a further estimate of dilatation function $D(z)$ through proving several inequalities by which some known results are improved.

Keywords　Beurling-Ahlfors extension, dilatation function, quasi-symmetric function