第25卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.25 No.1
2004年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2004

文章编号 1000-5013(2004)01-0108-02

正定厄米特矩阵的几个不等式

宋 海 洲

(华侨大学数学系,福建 泉州 362011)

摘要 推广张远达在线性代数原理中给出的一个不等式,并得到两个不等式. 一个是关于一组 n 阶正定厄米特矩阵的不等式,另一个是关于一组两两可变换的 n 阶正定厄米特矩阵的不等式.

关键词 正定,厄米特矩阵,不等式

中图分类号 O 178 **文献标识码** A

1 主要结果

文[1]叙述了正定厄米特矩阵的一个重要性质.

定理1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 k 个 n 阶正定厄米特矩阵,则有

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_k|^{\frac{1}{n}} \geq |A_1|^{\frac{1}{n}} + |A_2|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |A_k|^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

同时,等号仅在 A_i 都是某个矩阵 B 的倍式时成立. 这里,$|A_i|$ 是 A_i 的行列式. 文[2]对这一性质进行推广,得到定理2.

定理2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 k 个 n 阶正定厄米特矩阵,则 $\forall t \geq \frac{1}{n}$,有

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_k|^{t} \geq |A_1|^{t} + |A_2|^{t} + \cdots + |A_k|^{t}. \tag{2}$$

令 $t = \frac{1}{n}$,式(2)即为式(1),故式(2)为式(1)的推广. 我们将不等式(1)再进行推广,得到如下两个定理.

定理3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 k 个 n 阶正定厄米特矩阵,$m \geq 1$,则有

$$\left|\frac{1}{k}(A_1^m + \cdots + A_k^m)\right|^{\frac{1}{n}} \geq \left[\frac{1}{k}(|A_1|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |A_k|^{\frac{1}{n}})\right]^m. \tag{3}$$

令 $m = 1$,式(3)即为式(1),故式(3)为式(1)的推广.

定理4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 k 个 n 阶正定厄米特矩阵,且两两可交换. 当 $s \geq t$,则有

$$\left|\frac{1}{k}(A_1^s + \cdots + A_k^s)\right|^{\frac{1}{s}} \geq \left|\frac{1}{k}(A_1^t + \cdots + A_k^t)\right|^{\frac{1}{t}}. \tag{4}$$

2 一些引理

引理1[1] 设 A 为 n 阶正定厄米特矩阵,则 A 的所有特征值为正实数.

引理2[1] 设 A 为 n 阶正定厄米特矩阵,则一定存在酉阵 U,使得 $U^{-1}AU = \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$,其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值.

引理3[1] 设 A 为 n 阶方阵,且存在酉阵 U,使得 $U^{-1}AU = \mathrm{diag}[\lambda_1, 2, \cdots, \lambda_n]$,$\lambda_i > 0\ (i = 1, \cdots, n)$,则 A 为正定厄米特矩阵.

引理4 设 A 为 n 阶正定厄米特矩阵,m 为任意正实数,则 A^m 也是 n 阶正定厄米特矩阵.

证明 由于 A 为 n 阶正定厄米特矩阵,故存在酉阵 U 使 $U^{-1}AU = \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$,$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A

收稿日期 2003-06-29

作者简介 宋海洲(1971-),男,讲师,主要从事基础数学和数学模型的研究. E-mail: hzsong@hqu.edu.cn

的 n 个特征值. 再由引理 1 知, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是正实数, 可得 $A = U \cdot \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n] U^{-1}$, 从而 $A^m = U \cdot \mathrm{diag}[\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m] U^{-1}$. 由 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为正实数知 $\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m$ 是正实数. 再由引理 3 知 A^m 也是正定厄米特矩阵.

引理 5[3]　$f(s) = \left(\frac{a_1^s + \cdots + a_k^s}{k}\right)^{\frac{1}{s}}$ 是单调非减的函数.

引理 6[4]　设 Γ 是一组两两可交换的规范方阵. 那么, 存在酉方阵 U, 使得 $\forall A \in \Gamma$, 有 $U^{-1}AU$ 为对角阵.

3　定理的证明

定理 3 的证明. 由于 $A_1, \cdots, A_k$ 是正定厄米特矩阵, 故 $A_1^m + \cdots + A_k^m$ 是正定厄米特矩阵. 从而

$$\left[\left|\frac{A_1^m + \cdots + A_k^m}{k}\right|^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{m}} = \left[\frac{1}{k}\left|A_1^m + \cdots + A_k^m\right|^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{m}} \geq \left[\frac{1}{k}\left(\left|A_1^m\right|^{\frac{1}{n}} + \cdots + \left|A_k^m\right|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{1}{m}} =$$

$$\left[\frac{\left(\left|A_1\right|^{\frac{1}{n}}\right)^m + \cdots + \left(\left|A_k\right|^{\frac{1}{n}}\right)^m}{k}\right]^{\frac{1}{m}} \geq \left[\frac{\left(\left|A_1\right|^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \cdots + \left(\left|A_k\right|^{\frac{1}{n}}\right)^1}{k}\right]^{\frac{1}{1}} = \frac{\left|A_1\right|^{\frac{1}{n}} + \cdots + \left|A_k\right|^{\frac{1}{n}}}{k}.$$

所以

$$\left|\frac{A_1^m + \cdots + A_k^m}{k}\right|^{\frac{1}{n}} \geq \left[\frac{\left|A_1\right|^{\frac{1}{n}} + \cdots + \left|A_k\right|^{\frac{1}{n}}}{k}\right]^m.$$

定理 4 的证明. 由于 $A_1, \cdots, A_k$ 是正定厄米特矩阵. 故 $A_1, \cdots, A_k$ 为规范方阵. 又 $A_1, \cdots, A_k$ 两两可交换, 则必定存在酉阵 U, 使得 $U^{-1}A_iU = \wedge_i = \mathrm{diag}[\lambda_1(A_i), \lambda_2(A_i), \cdots, \lambda_n(A_i)]$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 从而 $A_i^s = U \wedge_i^s U^{-1}$, $\sum_{i=1}^k A_i^s = U \sum_{i=1}^k \wedge_i^s U^{-1}$. $\frac{\sum_{i=1}^k A_i^s}{k} = U \frac{\sum_{i=1}^k \wedge_i^s}{k} U^{-1}$, 所以有

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^k A_i^s}{k}\right|^{\frac{1}{s}} = \left|\frac{\sum_{i=1}^k \wedge_i^s}{k}\right|^{\frac{1}{s}} = \det\left(\frac{1}{k}\mathrm{diag}\left[\sum_{i=1}^k \lambda_1^s(A_i), \cdots, \sum_{i=1}^k \lambda_n^s(A_i)\right]\right) =$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_1^s(A_i)}{k}\right]^{\frac{1}{s}} \cdots \left[\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_n^s(A_i)}{k}\right]^{\frac{1}{s}} \geq \left[\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_1^t(A_i)}{k}\right]^{\frac{1}{t}} \cdots \left[\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_n^t(A_i)}{k}\right]^{\frac{1}{t}} = \left|\frac{\sum_{i=1}^k \wedge_i^t}{k}\right|^{\frac{1}{t}} = \left|\frac{\sum_{i=1}^k A_i^t}{k}\right|^{\frac{1}{t}}.$$

故定理 4 成立.

推论　设 $A_1, \cdots, A_k$ 为 k 个 n 阶正定厄米特矩阵, 且两两可交换. 那么, $|(A_1 + \cdots + A_k)(A_1^{-1} + \cdots + A_k^{-1})| \geq k^{2n}$.

证明　令 $s = 1, t = -1$, 由定理 4 即得.

参　考　文　献

1　张远达. 线性代数原理[M]. 上海: 上海教育出版社, 1981. 470～473

2　袁晖坪. 复正定矩阵的 Minkowski 不等式[J]. 数学研究评论, 2001, 21(3): 464～468

3　宋海洲. 有关平均值的不等式及其证明[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2001, 22(3): 221～224

4　李　乔. 矩阵论八讲[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988. 42～46

Some Inequalities on Positive Definite Hermintian Matrix

Song Haizhou

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　An inequality given by Zhang Yuanda in the principle of linear algebra is extended and two inequalities are obtained. One inequality is about some positive definite Hermintian matrices of order n; while another inequality is about some exchangeable positive definite Hermintian matrices of order n.

Keywords　positive definite, Hermintian matrix, inequality.