第 25 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 25　No. 1
2004 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2004

文章编号　1000-5013(2004)01-0103-05

一类非线性非均衡蛛网模型的动态分析

黄赜琳[1]　　龚德恩[2]

([1] 上海财经大学经济学院, 上海 200083; [2] 华侨大学经济管理学院, 福建 泉州 362011)

摘要　描述单商品市场价格波动的蛛网模型是动态经济分析中的经典模型. 文中对传统蛛网模型加以改进, 建立一类需求函数为非线性函数、供给函数为线性函数、价格调节的非均衡蛛网模型. 对该模型进行动态分析与稳定性分析, 从而得到两个结论. 一是模型不会出现 3 以上周期运动和混沌现象, 二是均衡价格的存在条件及稳定区间.

关键词　非线性, 非均衡, 蛛网模型, 稳定性

中图分类号　O 221.2; F 25　　　文献标识码　A

通常, 关于单商品市场价格波动的稳定性问题, 是在供需均衡的条件下进行研究的, 称为"蛛网模型"(Cobweb Model). 它广泛应用于分析农产品的供求波动, 以及发展中国家初级产品的贸易条件. 传统蛛网模型有两个基本假定, 即假定供给函数和需求函数均为线性且每一期的供给与需求相等, 在实际的经济系统中这两个条件都难以成立. 为了克服这两个缺陷, 本文将非均衡理论及非线性混沌理论同时应用于市场价格模型中进行研究. 对传统的蛛网模型加以改进, 从现实经济系统运作的实际情况出发, 建立更加准确、科学, 更能反映经济现实的非线性非均衡蛛网模型. 非线性非均衡蛛网模型大致可分为两类[1~4]: 一类是需求、供给均为非线性函数的非均衡模型; 一类是需求或供给其一为非线性函数的非均衡模型. 关于非均衡市场的调节方式有两种: 一是数量调节; 二是价格调节. 考虑到市场本身将有一定的价格调节功能, 使供给与需求朝着向均衡的方向发展. 本文将价格调节机制引入非均衡市场中, 并在此基础上研究价格波动的稳定性问题. 据此, 本文建立一类需求函数为非线性函数、供给函数为线性函数、价格调节的非均衡蛛网模型, 并对所建立的模型进行动态分析, 研究了各种参数条件下价格波动的稳定性问题, 从而得到关于价格波动的若干结论.

1　模型的构建

本文采用的需求函数为非线性函数 $D_t = a + b/p_t$, 供给函数为线性函数 $S_t = -A + Bp_t^*$, p_t^* 为 t 期商品的预期价格. 该模型要讨论的是参照正常价格预期, 即

$$p_t^* = p_{t-1} + c(p_N - p_{t-1}), \qquad 0 \leq c < 1,$$

其中 p_N 通常为正常价格, c 为参照正常价格预期的调节参数. 这种预期价格是在前期价格的基础上, 根据前期价格偏离正常价格的情况调整本期的预期价格. 前期价格低于正常价格时, 本期的预期价格上调; 反之, 则下调. 特别地, 当参数 c 为零, 则前期价格即为本期的预期价格.

对于非均衡市场的价格调节, 常见的有如下两种形式为

$$p_t = p_{t-1} + C(D_t - S_t), \qquad C > 0, \tag{1}$$

$$p_t = p_{t-1} + C(D_{t-1} - S_{t-1}), \qquad C > 0. \tag{2}$$

在式(1), (2)中, C 称为价格调节系数. 它反映价格随着超额需求的变动而进行调整时, 调整速度和幅度

收稿日期　2003-08-27

作者简介　黄赜琳(1976-), 女, 博士研究生, 主要从事非线性经济学的研究. E-mail: bluerhuang@sina.com

基金项目　福建省社科研究"十五"规划基金资助项目(2001B072)

的度量参数. 调节方程式(1)表明, 本期实际价格的变动$(p_t - p_{t-1})$与本期超额需求$(D_t - S_t)$同方向变动; 而调节方程式(2)则表明, 本期实际价格的变动$(p_t - p_{t-1})$与前期超额需求$(D_{t-1} - S_{t-1})$同方向变动. 这两种价格调节机制, 反映的是不同商品市场的价格调节规律. 本文采用价格调节方程式(1).

基于以上分析, 本文建立一个包括需求方程、供给方程、预期价格方程及价格调节方程的市场价格模型为

$$\left.\begin{aligned} &D_t = a + \frac{b}{p_t},\\ &S_t = -A + Bp_t^*,\\ &p_t^* = p_{t-1} + c(p_N - p_{t-1}),\\ &p_t = p_{t-1} + C(D_t - S_t),\\ &a, b, p_N, A, B, C > 0,\ 0 \leq c < 1. \end{aligned}\right\} \tag{M}$$

在模型(M)中, D_t, S_t, p_t, p_t^* 分别为 t 期的需求量、供给量、实际价格和预期价格. p_N 为正常价格, C 为价格调节参数, c 为参照正常价格预期的调节参数. a, b, A, B 为参数. 把模型(M)中第1, 2, 3个方程代入第4个方程, 可得

$$p_t - \frac{a_1}{p_t} = a_2 p_{t-1} + a_3, \tag{3}$$

其中

$$a_1 = Cb,\quad a_2 = 1 - CB(1 - c),\quad a_3 = C(a + A) - CBcp_N. \tag{4}$$

因为 a, b, p_N, A, B, C 均大于0且 $0 \leq c < 1$, 所以

$$a_1 > 0,\quad a_2 < 1. \tag{5}$$

整理方程式(3), 可得

$$p_t^2 - (a_2 p_{t-1} + a_3)p_t - a_1 = 0. \tag{6}$$

因此, 讨论模型(M)等价于讨论价格方程(6). 为了方便讨论, 令

$$f(p) = (1 - a_2)p^2 - a_3 p - a_1. \tag{7}$$

2 模型的动态分析

为了对相关经济模型进行理论分析的需要, 下面先介绍一个定理[5].

定理1 考虑一阶差分方程

$$x_{t+1} = f_r(x_t), \tag{8}$$

其中 f_r 为光滑函数, r 为参数. 若 x_r 为式(8)的一个不动点(或均衡点), 即有

$$x_r = f_r(x_r).$$

那么, x_r 为稳定均衡点(即 $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = x_r$)的充分必要条件为

$$\left|\frac{df_r}{dx}\right|_{x_r} < 1.$$

首先, 把模型(M)变形为本期价格关于前期价格的函数. 为此, 由式(6)(舍去负根)解得

$$p_r = \frac{1}{2}\left(a_2 p_{t-1} + a_3 + \sqrt{(a_2 p_{t-1} + a_3)^2 + 4a_1}\right) \equiv G(p_{t-1}). \tag{9}$$

易知

$$G'(p_{t-1}) = \frac{a_2}{2}\left(1 + \frac{a_2 p_{t-1} + a_3}{\sqrt{(a_2 P_{t-1} + a_3)^2 + 4a_1}}\right). \tag{10}$$

由式(5)知, $1 + \dfrac{a_2 p_{t-1} + a_3}{\sqrt{(a_2 P_{t-1} + a_3)^2 + 4a_1}} > 0$ 恒成立. 因此, 对于参数 a_2 的给定值及任意的价格 $p \in R_+$, 函数 $G(p_{t-1})$ 恒为单调递增或递减.

2.1　一周期均衡点的存在性及其稳定性分析

2.1.1　均衡点的存在性分析　价格方程(6)存在均衡点的充要条件是当 $p_t = p_{t-1}$ 时方程(6)有实根, 即等价于 $f(p) = 0$ 有实根. $f(p) = 0$ 的判别式为

$$\$ = a_3^2 + 4a_1(1 - a_2).$$

由式(5)可知, $\$ > 0$ 恒成立. 因此, 方程 $f(p) = 0$ 存在正实根(舍去负根)为

$$p_e = \frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 + 4a_1(1 - a_2)}}{2(1 - a_2)}.$$

回复原参数可知, 价格方程(6)恒存在一个正均衡点为

$$p_e = \frac{(a + A - Bcp_N) + \sqrt{(a + A - Bcp_N)^2 + 4bB(1 - c)}}{2B(1 - c)}. \tag{11}$$

2.1.2　均衡点的稳定性分析　由方程(6)对 p_{t-1} 求导, 得

$$\frac{dp_t}{dp_{t-1}}\Big|_{p_e} = \frac{a_2}{1 + \frac{a_1}{p_e^2}} = \frac{a_2 p_e^2}{a_1 + p_e^2}. \tag{12}$$

根据定理 1, 由价格方程(6)决定的系统关于均衡点渐近稳定的充要条件为

$$-1 < \frac{a_2 p_e^2}{a_1 + p_e^2} < 1. \tag{13}$$

要使不等式(13)成立, 则

$$a_3 > 0,\ -1 - \frac{4a_1}{a_3^2} < a_2 < 1(\text{或 } a_3 [0). \tag{14}$$

回复原参数式(14)式等价于

$$0 < c < c,\ 0 < C < C(\text{或 } c [c < 1). \tag{15}$$

其中

$$c = \frac{a + A}{p_N B},\ C = \frac{1}{B} + \frac{1}{B}\sqrt{1 + \frac{4bB}{[(a + A) - Bcp_N]^2}}. \tag{16}$$

综上所述, 可得

定理 2　设 $a, b, p_N, A, B, C > 0$, $0 [c < 1$, 系统(M)存在正均衡点 $p_e > 0$. (i) 当 $0 [c < c$, $0 < C < C$ 或 $c [c < 1$ 时, 关于 p_e 为渐近稳定的. (ii) 当 $0 [c < c$, $C [C$ 时, 关于 p_e 不稳定. 这当中, p_e 由式(11)确定, c, C 由式(16)确定.

定理 2 表明, 模型(M)中包含有两个价格调节参数, 一个是参照正常价格预期的调节参数 c, 属于生产者调节; 另一个参照超额需求的调节参数 C, 属于市场调节. 这两个调节参数在系统中所发挥的作用不同, 从而影响着整个系统的稳定性. 根据前面分析可知, 当 c 值偏大, 即参照正常价格预期的调节幅度偏大, 则系统便可达到稳定状态. 如果 c 值偏小, 即参照正常价格预期的调节幅度偏小, 可通过调整 C 的值, 也即根据市场的超额需求量来调节市场价格. 但调节幅度要适当, 不可太大. 这样, 系统也可以达到稳定状态, 否则系统不稳定. 换言之, 如果生产者只要通过参照正常价格预期调节市场价格便可使市场达到均衡状态, 则同时也实现了系统的稳定状态. 此时, 市场调节不起作用. 如果单独由生产者调节不足以使市场出清, 则市场调节发挥作用. 市场自动调节市场价格使得市场需求与供给相等, 但是只有当市场调节适中才可使系统达到稳定状态. 如果市场调节过大, 系统关于均衡价格不稳定; 均衡状态很快被破坏, 系统会改变其运动轨迹, 进入另一个周期运动. 由此可见, 两个调节参数同时作用于系统(M). 在第一个周期里, 参照正常价格预期的调节力度, 要比参照超额需求的调节力度来得大. 即生产者调节比市场调节更有效.

2.2　二周期均衡点的存在性及其稳定性分析

依据混沌理论, 只有当系统存在不稳定的周期点, 系统才会进入下一个周期并开始分岔, 出现新的周期点. 由定理 2 可知, 当 $C \backslash C$, $c > c \backslash 0$ 时, 系统(M)关于一周期均衡价格 p_e 不稳定. 进入第二周期, 系统开始分岔, 这时应讨论系统(M)关于二周期均衡点的稳定性.

2.2.1　均衡点的存在性分析　根据定义,价格方程(6)存在二周期均衡点当且仅当

$$\begin{cases} p_{t+2} = p_t(\text{有实数根}) & (P\ t = 0, 1, 2, ,), \\ p_{t+1}\ X\ p_t & (P\ t = 0, 1, 2, ,). \end{cases}$$

上述方程等价于

$$\left.\begin{aligned} &(1+a_2)f(p)(p^2 - a_3 p - \frac{a_1}{1+a_2}) = 0 \quad (a_2\ X - 1), \\ &f(p)\ X\ 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

方程(17)又等价于

$$p^2 - a_3 p - \frac{a_1}{1+a_2} = 0. \tag{18}$$

当 C\ C, c> c\ 0时,通过计算可得,方程(17)恒存在两个正实数根为

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}(a_3\ ?\ \sqrt{a_3^2 + \frac{4a_1}{1+a_2}}).$$

回复原参数,可得这两个二周期均衡点为

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}\left[C(a + A - Bcp_N)\ ?\ \sqrt{C^2(a + A - Bcp_N)^2 + \frac{4Cb}{2 - CB(1-c)}}\right]. \tag{19}$$

2.2.2　衡点的稳定性分析　由(9)式可知

$$p_{t+1} = G(p_t) = G(G(p_{t-1})) > G^{(2)}(p_{t-1}). \tag{20}$$

假设 p 为系统(M)的二周期均衡点,则 $p_{t+1} = p_{t-1} = p$. 因此, p 也为价格方程(20)的解. 由方程(20)对 p_{t-1}求导,得到 $G^{(2)}(p_{t-1})$在 p 处的斜率为

$$\left.\frac{dp_{t+1}}{dp_{t-1}}\right|_p = \left.\frac{dp_{t+1}}{dp_t} \# \frac{dp_t}{dp_{t-1}}\right|_p = \left.(\frac{dp_t}{dp_{t-1}})^2\right|_p = (\frac{a_2 p^2}{a_1 + p^2})^2. \tag{21}$$

根据定理1,由价格方程(20)决定的系统关于均衡点渐近稳定的充要条件为

$$\left|(\frac{a_2 p^2}{a_1 + p^2})^2\right| < 1. \tag{22}$$

将由式(19)确定的值(p_1, p_2)分别替代式(22)中的p,通过计算可知,(p_1, p_2)分别使得式(22)成立. 综上所述,可得

定理3　设 a, b, p_N, A, B, C> 0, 0[c< 1, 当0[c< c, C[C时,系统(M)存在两个正的二周期均衡点(p_1, p_2),且关于(p_1, p_2)渐近稳定. 其中 c, C由式(16)确定, (p_1, p_2)由式(19)确定.

定理3表明,对于给定的市场价格系统,一周期均衡点不稳定时,则进入第二周期,系统开始分岔. 基于以上分析可知,当C值偏大、c值偏小,即参照超额需求的调节幅度偏大,参照正常价格预期的调节幅度偏小. 那么,系统存在二周期均衡价格,且关于二周期均衡价格渐近稳定. 由定理3可知,系统(M)不存在不稳定的二周期均衡点的情况,依据混沌理论,系统不会继续分岔. 因此,该系统不会出现3以上的周期运动和混沌现象,只能进行收敛、发散和二周期闭合3种运动类型.

结合定理2和定理3可知,对于有两个调节参数同时作用的系统(M),在第一个周期运动里,如果系统出现稳定的一周期均衡价格,则系统围绕均衡价格做稳定的一周期闭合运动. 一旦系统出现不稳定的一周期均衡价格,系统改变其运动轨迹,进入第二个周期运动. 出现稳定的二周期均衡价格,并围绕这个均衡价格做稳定的二周期闭合运动. 对于给定的市场价格系统(M)只能进行一周期闭合或二周期闭合两种运动类型,生产者调节和市场调节的共同作用可使系统达到最终的稳定状态.

3　实例

如设参数 a= 2, b= 1, A= 3, B= 2, p_N= 3, 由这些参数所确定的市场价格系统(M)的动态分析.

通过计算, 可得 c= 0.83, $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{(5-6c)^2}}$. 由定理2可知, 市场价格系统(M)存在一周期

均衡点. 当 $1 > c \geq 0.83$ 或 $0 < c < 0.83$, $0 < C < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{(5-6c)^2}}$, 则由这些参数所决定的市场价格系统(M)关于一周期均衡价格稳定; 否则, 系统不稳定.

例如, 若 $c = 0.9$, 当 $C = 0.5$, 系统(M)关于 $p_e = 1.45$ 稳定; 而当 $C = 2$, 系统(M)关于 $p_e = 1.44$ 稳定. 若 $c = 0.4$, $C = 1.24$, 当 $C = 0.8$, 计算可得一周期均衡价格 $p_e = 2.33$, 系统(M)关于 $p_e = 2.33$ 稳定; 而当 $C = 2$, 系统(M)关于 $p_e = 2.37$ 不稳定.

系统(M)存在一周期均衡点不稳定的情况. 因此, 进入第二周期, 系统开始分岔. 由定理 3 可知, 当 $0.83 > c > 0$, $C \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{(5-6c)^2}}$, 系统(M)存在二周期均衡价格, 且关于二周期均衡价格稳定. 例如, 若 $c = 0.4$, $C = 1.24$, 当 $C = 2$, 系统(M)关于二周期均衡价格 $(p_1, p_2) = (3.93, 1.27)$ 渐近稳定.

4　结束语

本文应用非均衡理论及非线性混沌理论, 对新构建的非线性非均衡蛛网模型进行动态分析. 研究各种参数条件下价格波动的稳定性问题. 从而, 得到文中的两个结论: (1) 模型不会出现 3 以上周期运动和混沌现象; (2) 各周期均衡价格的存在条件及稳定区间. 这些结论不论是对于经济的理论分析还是实际的经济预测, 都有一定的参考价值. 前文提到, 描述单商品市场价格波动的蛛网模型的具体形式有许多, 其运动类型完全由供给函数和需求函数的具体形式所确定. 因此, 若供给函数和需求函数的形式一旦确定, 则通过对模型进行动态分析可判断出模型的周期行为. 从而, 可以进一步探讨有关各周期均衡价格的存在性问题, 以及模型关于周期均衡价格的稳定性问题. 对于其它形式的蛛网模型, 我们将另文进行研究.

参　考　文　献

1　张世英, 李忠民. 非均衡经济计量建模与控制[M]. 天津: 天津大学出版社, 2002. 297~347
2　葛新权. 也论特殊商品的价格模型的混沌行为[J]. 数量经济技术经济研究, 1997, (9): 37~41
3　龚德恩, 雷　勇. 非均衡蛛网模型价格调节的稳定性分析(Ⅰ)[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1999, 20(3): 317~322
4　龚德恩, 雷　勇. 非均衡蛛网模型价格调节的稳定性分析(Ⅱ)[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1999, 20(4): 427~432
5　理查德 H 戴著. 混沌经济学[M]. 傅　琳等译. 上海: 上海译文出版社, 1996. 17~53

A Kind of Nonlinear and Disequilibrium Cobweb Model and Its Dynamic Analysis

Huang Zelin[1]　　Gong Deen[2]

([1] School of Economics, Shanghai Univ. of Finance & Economics, 200083, Shanghai, China;
[2] College of Econo. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　Cobweb model for describing fluctuation in the market price of single commodity is classical model of dynamic economic analysis. By improving traditional cobwell model, a type of disequilibrium cobweb model for price adjustment is built, with demand function as nonlinear function and supply function as linear function; and dynamic analysis and stability analysis of this model are carried out. Thus two conclusions are obtained: one conclusion is that the model will not exhibit more than three cyclic price movements and chaotic phenomenon; another conclusion is about the condition under which equilibrium price exists and the interval of its stability.

Keywords　nonlinear, disequilibrium, cobweb model, stability