第 25 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 25 No. 1
2004 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2004

文章编号 1000-5013(2004)01-0022-04

时延细胞神经网络的指数稳定性和周期解

谢惠琴 王全义

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 研究时延细胞神经网络周期解的存在性和全局指数稳定性问题. 巧妙地引入可调实参数 $d_i > 0(1, 2, \cdots, n)$, 通过构造 Lyapunov 泛函并结合有效的分析技巧, 给出新的充分准则. 所得的结果, 推广和改进已有报道的相关结果. 这些准则可用于设计全局指数稳定的和周期振荡的具时滞的神经网络, 扩大神经网络设计的范围.

关键词 细胞神经网络, Lyapunov 泛函, 周期解, 全局指数稳定性

中图分类号 O 175.1 文献标识码 A

1 问题的提出

对神经网络模型的理论和应用研究, 近年来已成为国际研究的新热点. 众所周知, 神经网络模型的定性对具体综合过程具有启发和指导作用, 其严格分析显得十分重要. 神经网络的两个主要应用是联想记忆和最优化计算, 这就需要我们视其不同的应用作不同类型的稳定性分析. 近年来, 许多学者已深入研究神经网络和细胞神经网络的动力学行为, 并得到许多重要结果[1~10]. 例如, 文[5]研究具常数时滞的神经网络模型为

$$x'_i(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} f_j(x_j(t-\tau_{ij})) + p_i, \qquad t \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

本文考虑时延细胞神经网络模型的全局指数稳定性和周期解. 它由泛函微分方程组描述为

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(\sigma_j x_j(t-\tau_{ij})) + I_i(t), \qquad c_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

在式(1)中, n 是神经网络中神经元的个数, $x_i(t)$ 表示第 i 个神经元在 t 时刻的状态变量, f_j 表示非线性激活函数, a_{ij}, b_{ij}, σ_j, c_i 是常数. a_{ij} 表示第 j 个神经元 t 时刻的输出对第 i 个神经元的影响程度, b_{ij} 表示第 j 个神经元 $t-\tau_{ij}$ 时刻的输出对第 i 个神经元的影响程度. $I_i(t)$ 是对第 i 个神经元在 t 时刻的偏置, τ_{ij} 表示传递时滞并且是非负常数, σ_j 表示放大器放大率, c_i 表示在与神经网络不连通且无外部附加电压差的情况下, 第 i 个神经元恢复孤立静息状态的速率. 本文巧妙地引入可调实参数 $d_i > 0(1, 2, \cdots, n)$, 通过构造 Lyapunov 泛函并结合一些分析技巧, 进一步研究时延细胞神经网络的全局指数稳定性和周期解, 给出一些新的充分条件. 在这些条件中含有可调整的参数, 这对全局指数稳定的和周期振荡的具时滞的神经网络的设计, 以及其应用具有重要的指导意义. 另外, 所得结果推广了文[5, 6, 8]的相关结果, 并且这些条件能判断一些文[9]无法判断的问题. 我们假定激活函数满足两个关系. (H_1) $f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界. (H_2) $f_i(0) = 0$, 且存在常数 $\mu_i > 0$, 使得 $|f_i(u) - f_i(v)| \leqslant \mu_i |u - v|$, $\forall u, v \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

收稿日期 2002-06-29

作者简介 谢惠琴(1977-), 女, 硕士, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究; 现为福州大学数学系(350002 福建福州)助教. E-mail: hqxie_fzu@163.com

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(01QZR02)

2　平衡点的唯一性和全局指数稳定性

考虑当 $I_i(t)=I_i$ 时模型(1)的特殊情形, 即

$$x'_i(t)=-c_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(\sigma_jx_j(t-\tau_{ij}))+I_i,\qquad c_i>0,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

这里 $0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\tau$, τ, I_i 是常数, $i=1,2,\cdots,n$. 模型(2)的初始条件是

$$x_i(s)=\varphi_i(s),\qquad s\in[-\tau,0], \tag{3}$$

其中 $\varphi_i[-\tau,0]\rightarrow\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 是连续的, 且假设模型(2)存在平衡点.

记 $C=C([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$, 它是从 $[-\tau,0]$ 映到 $\mathbf{R}^n$ 的连续有界函数所构成的线性空间. 对 $\forall\varphi\in C$, 我们定义 $\|\varphi\|=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}|\varphi(\theta)|$. 其中 $|\varphi(\theta)|=\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(\theta)|^2$, 则 C 在这个范数下是一个巴拿赫空间. 方程(2)的具有有界连续初始函数 $\varphi\in C$ 的解, 将表示为 $\boldsymbol{x}(t,0,\varphi)$ 或 $\boldsymbol{x}(t,\varphi)$ 或 $\boldsymbol{x}(t)$(如果不会出现相混淆的话).

定理 1　假设激活函数 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足条件(H_1), (H_2), 并且假设系统参数满足条件(H_3). 即存在实数 $d_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 使得 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{-2c_i+\sum_{j=1}^{n}[d_i^{-1}\mu_jd_j(|a_{ij}|+|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|)+d_j^{-1}\mu_id_i(|a_{ji}|+|\sigma_i|\cdot|b_{ji}|)]\}<0$ 成立. 那么, 则模型(2)的平衡点是唯一的, 并且是全局指数稳定的.

证明　假设模型(2)存在平衡点 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$. 下面证明平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 是全局指数稳定的, 至于它的唯一性可由全局指数稳定性导出来. 在方程(2)中, 令 $x_i(t)=d_iy_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$, 则有

$$y'_i(t)=-c_iy_i(t)+d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(d_jy_j(t))+d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(d_j\sigma_jy_j(t-\tau_{ij}))+d_i^{-1}I_i,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

设 $x_i^*=d_iy_i^*(i=1,2,\cdots,n)$, 由式(4)可知, 偏差 $z_i(t)=y_i(t)-y_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$x_i(t)-x_i^*=d_iz_i(t),$$

$$z'_i(t)=-c_iz_i(t)+d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(d_j(z_j(t)+y_i^*))-f_i(d_iy_i^*)]+d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[f_j(d_j\sigma_j(z_j(t-\tau_{ij})+y_i^*))-f_i(d_i\sigma_iy_i^*)],\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

设 $\boldsymbol{x}(t)\triangleq\boldsymbol{x}(t,\varphi)=(x_1(t,\varphi),x_2(t,\varphi),\cdots,x_n(t,\varphi))^{\mathrm{T}}\triangleq(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是方程(2)的任一解, 满足初始条件(3), 则 $\boldsymbol{x}(t)$ 显然满足式(5). 由条件(H_3)知必能选取充分小的 $\varepsilon>0$, 使得

$$-2c_i+\sum_{j=1}^{n}[d_i^{-1}\mu_jd_j(|a_{ij}|+|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|)+d_j^{-1}\mu_id_i(|a_{ji}|+|\sigma_i|\cdot|b_{ji}|\mathrm{e}^{\varepsilon\tau})]+\varepsilon<0.$$

取 Lyapunov 泛函 $V(t)=\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}z_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+\frac{1}{2}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}\mu_jd_j|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|z_j^2(s)\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\tau_{ij})}\mathrm{d}s]$. 计算 $V(t)$ 沿着方程(5)的右上导数, 并利用基本不等式 $ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, 以及假设条件可($H_2$)得

$$\begin{aligned}D^+V(t)\leqslant&\sum_{i=1}^{n}\{[-c_iz_i^2(t)+d_i^{-1}|z_i(t)|\sum_{j=1}^{n}\mu_jd_j|a_{ij}|\cdot|z_j(t)|+\\&d_i^{-1}|z_i(t)|\sum_{j=1}^{n}\mu_jd_j|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|\cdot|z_j(t-\tau_{ij})|]\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\frac{1}{2}\varepsilon z_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\frac{1}{2}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mu_jd_j|\sigma_j|\cdot\\&|b_{ij}|z_j^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon(t+\tau_{ij})}-\frac{1}{2}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mu_jd_j|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|z_j^2(t-\tau_{ij})\mathrm{e}^{\varepsilon t}\}\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[-2c_i+\sum_{j=1}^{n}(d_i^{-1}\mu_jd_j|a_{ij}||\sigma_j|\cdot|b_{ij}|)+\\&d_i^{-1}\mu_id_i(|a_{ij}||\sigma_j|\cdot|b_{ij}|\mathrm{e}^{\varepsilon t}))+\varepsilon]z_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\leqslant0.\end{aligned}$$

因此, 当 $t\geqslant0$ 时, $V(t)\leqslant V(0)$. 又由于

$$V(0)=\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}z_i^2(0)+\frac{1}{2}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau_{ij}}^{0}\mu_jd_j|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|z_j^2(s)\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\tau_{ij})}\mathrm{d}s]\leqslant$$

$$\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau e^{\varepsilon\tau}\max_{1\leqslant i\leqslant n}[\mu_i d_i|\sigma_i|\sum_{j=1}^{n}(d_j^{-1}|b_{ij}|)]\}\cdot\Phi,$$

其中 $\Phi=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}z_i^2(\theta)$. 另外，由 Lyapunov 泛函的取法可知 $V(t)\geqslant\frac{1}{2}e^{\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t)$, $t\geqslant 0$. 所以, $\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t)\leqslant K_1e^{-\varepsilon t}\Phi$, $t\geqslant 0$. 其中 $K_1=1+\tau e^{\varepsilon\tau}\max_{1\leqslant i\leqslant n}[\mu_j d_j|\sigma_j|\sum_{j=1}^{n}(d_j^{-1}|b_{ij}|)]$. 因为 $|x_i(t)-x_i^*|=d_i|z_i(t)|$, $|\varphi_i(\theta)-x_i^*|=d_i|z_i(\theta)|$, $\theta\in[-\tau,0]$, $i=1,2,\dots,n$, 所以有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i(t)-x_i^*)^2=\sum_{i=1}^{n}(d_iz_i(t))^2=\max_{1\leqslant i\leqslant n}d_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}z_i^2(t)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}(d_i^2\cdot K_1e^{-\varepsilon t}\Phi)\leqslant Ke^{-\varepsilon t}\|\varphi-\boldsymbol{x}^*\|.$$

这里, $K=\max_{1\leqslant i\leqslant n}d_i^2\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{d_i^2}\cdot K_1$, 它表明方程(2)的平衡点是全局指数稳定的. 证毕.

注1　只要取 $c_i=b_i$, $a_{ij}=0$, $b_{ij}=w_{ij}$, $\sigma_i=d_i=1$, $I_i=p_i$, $\mu_i=\sigma_i$, $i,j=1,2,\dots,n$, 即可得文〔5〕中推论2的结果.

注2　只要取 $c_i=b_i$, $a_{ij}=0$, $b_{ij}=w_{ij}$, $\sigma_i=d_i=1$, $I_i=p_i$, $\tau_{ij}=\tau_j$, $\mu_i=\sigma_i$, $i,j=1,2,\dots,n$, 即可得文〔6〕中定理1(Ⅱ)的结果.

注3　只要取 $c_i=b_i$, $x_i(t)=u_i(t)$, $a_{ij}=0$, $b_{ij}=a_{ij}$, $f_i(t)=g_i(t)$, $\sigma_i=\lambda_i$, $\tau_{ij}=\tau_j$, $I_i=p_i$, $d_i=1$, $i,j=1,2,\dots,n$, 即可得文〔8〕中定理2的结果.

3　周期解的存在唯一性和全局指数稳定性

我们讨论模型的周期解, 即

$$x_i'(t)=-c_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(\sigma_jx_j(t-\tau_{ij}))+I_i(t),\qquad c_i>0,\ i=1,2,\dots,n.\tag{6}$$

这里 I_i: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$ 是周期为 ω 的连续周期函数, 即 $I_i(t+\omega)=I_i(t)$, 其它符号的含义与式(2)中相同. 假设 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[-\tau,+\infty]$ 上是连续的, 我们定义 $\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta)$, $\theta\in[-\tau,0]$, 对所有的 $t\geqslant 0$, 则 $\boldsymbol{x}_t\in C$. 考虑时滞微分系统, 即

$$x_i'(t)=a_ix_i(t)+F_i(t,x_t),\qquad i=1,2,\dots,n.\tag{7}$$

这里 a_i $(i=1,2,\dots,n)$ 是常数, F_i: $\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}$ 是连续的, 并且对 $\forall(t,\varphi)\in\mathbf{R}\times C$, $F_i(t+\omega,\varphi)=F_i(t+\varphi)$, $\omega>0$ 是一个常数, $i=1,2,\dots,n$.

引理1[10]　假设 $a_i<0$, F_i $(i=1,2,\dots,n)$ 是连续有界的, 则模型(7)至少有一个 ω-周期解.

证明　由文〔10〕中引理1立即可得.

定理2　设激活函数 f_i $(i=1,2,\dots,n)$ 满足条件(H_1), (H_2), 且假设系统参数满足条件(H_3). 那么, 模型(6)存在唯一的 ω-周期解. 当 $t\to+\infty$ 时, 模型(6)的所有其它解均指数地收敛于这个周期解.

证明　首先由文〔11〕推论D的结果, 可以得到对所有的 $t\geqslant 0$, 模型(6)和式(3)的解的存在性. 在方程(6)中, 取

$$F_i(t+\varphi)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(\varphi_j(0))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(\sigma_j\varphi_j(-\tau_{ij}))+I_i(t),\qquad a_i=-c_i,\quad i=1,2,\dots,n.$$

对 $\forall\varphi\in C$, 由引理1可得方程(6)至少有 ω-周期解 $\boldsymbol{x}^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t),\dots,x_n^*(t))^{\mathrm{T}}$. 其次, 我们证明当 $t\to+\infty$ 时, 方程(6)的所有其它解均指数地收敛于 $\boldsymbol{x}^*(t)$. 在方程(6)中, 可令 $x_i(t)\triangleq x_i(t,\varphi)=d_iy_i(t,\varphi)\triangleq d_iy_i(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$, 则有

$$y_i'(t)=-c_iy_i(t)+d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(d_iy_j(t))+d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(d_i\sigma_jy_j(t-\tau_{ij}))+d_i^{-1}I_i(t),\qquad i=1,2,\dots,n.\tag{8}$$

设 $x_i(t)\triangleq x_i(t,\varphi^*)=d_iy_i(t,\varphi^*)\triangleq d_iy_i^*(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$, 由方程(8)知偏差 $z_i(t)=y_i(t)-y_i^*(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$ 满足

$$x_i(t)-x_i^*(t)=d_iz_i(t),$$

$$z_i'(t) = -c_i z_i(t) + d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[f_j(d_j(z_j(t)+y_i^*(t))) - f_j(d_j y_j^*(t))] +$$
$$d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}[f_j(d_j\sigma_j(z_j(t-\tau_{ij})+y_i^*(t-\tau_{ij}))) -$$
$$f_j(d_j\sigma_j y_j^*(t-\tau_{ij}))],\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

由条件(H_3)可知, 必能选取充分小的 $\varepsilon>0$, 使得

$$-2c_i + \sum_{j=1}^{n}[d_i^{-1}\mu_j d_j(|a_{ij}|+|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|) + d_j^{-1}\mu_i d_i(|a_{ji}|+|\sigma_i|\cdot|b_{ji}|e^{\varepsilon\tau})] + \varepsilon < 0.$$

考虑 Lyapunov 泛函

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{2}z_i^2(t)e^{\varepsilon t} + \frac{1}{2}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_j}^{t}\mu_j d_j|\sigma_j|\cdot|b_{ij}|z_j^2(s)e^{\varepsilon(s+\tau_{ij})}ds\Big].$$

类似于定理 1 的证明, 可得

$$\|x(t,\varphi) - x(t,\varphi^*)\| \leqslant Ke^{-\varepsilon t}\|\varphi - \varphi^*\|,\qquad t\geqslant 0.$$

这里 K 的定义与定理 1 中的相同. 因此, 模型(6)存在唯一的 ω-周期解, 并且当 $t\to+\infty$时, 方程(6)的所有其它解均指数地收敛于这个周期解.

注 4　由定理 **2** 的证明知, 定理 1 对平衡点存在性的假设是合理的.

参　考　文　献

1 Van Den D P, Zhou Xingfu. Global attractivity in delayed Hopfield neural network models[J]. SIAM J. Appl. Math., 1998, 58(6): 1 878~1 890

2 梁学斌, 吴立德. Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性及其应用[J]. 中国科学(A 辑), 1995, 25(5): 523~532

3 曹进德. 时延细胞神经网络的指数稳定性和周期解[J]. 中国科学(E 辑), 2000, 30(6): 541~549

4 Cao Jinde. Periodic solutions and exponential stability in delayed cellular neural networks[J]. Phys. Rev. (E), 1999, 60(11): 3 244~3 248

5 王林山, 徐道义. Hopfield 型时滞神经网络的稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(1): 59~64

6 曹进德, 李继彬. 具有交互神经传递时滞的神经网络的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(4): 425~430

7 沈　轶, 廖晓昕. 广义的时滞细胞神经网络的动态分析[J]. 电子学报, 1999, 27(10): 62~64

8 Zhou Dongming, Cao Jinde, Li Jibin. Stability analysis of Hopfield neural networks with delays[J]. Ann. of Diff. Eqs., 1998, 14(2): 460~467

9 侯学刚. 时滞细胞神经网络模型的全局吸引性和全局指数稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2002, 25(4): 358~361

10 Fang Hui. Periodic solutions and stability analysis for neural networks with time-varying delay[J]. Ann. of Diff. Eqs., 2001, 17(4): 318~328

11 Driver R D. Ordinary and Delay Differential Equations[M]. New York. Springer-Verlag, 1977. 300~312

Exponential Stability and Periodic Solution for Cellular Neural Networks with Time Delay

Xie Huiqin　　Wang Quanyi

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　A study is made on the existence of periodic solution and globally exponential stability of cellular neural network with time delay. Some new sufficient criteria are given by ingeniously leading adjustable real parameters $d_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, and by constructing lyapunov functional in combination with some skills of analysis. With the authors' results, the related results in the reported literatures can be entended and improved. These criteria can be applied to the design of globally exponential stable and periodically oscillatory neural network with time delay. They broaden the design of neural network.

Keywords　cellular neural networks, Lyapunov function, periodic solution, globally exponential stability