

文章编号 1000-5013(2004)01-0018-04

一类特殊流行病的动力模型和动力性状分析

李 浩

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 针对类似乙肝的一类流行病的传播机制, 建立较好的常微分动力模型. 通过研究它的动力稳定性, 得到较为理想的结论.
关键词 流行病, 地方病, 稳定性, 无病平衡点, 地方病平衡点, 局部渐进稳定, 再生数
中图分类号 O 175.1; R 181.2+3 **文献标识码** A

1 预备知识及相关定理

定理 1 线性系统的稳定性判据^[1]. 考虑线性系统

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{1}$$

其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 是实矩阵, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. 若 A 的所有特征值均具有负实部, 则系统(1)的零解渐进稳定. 若 A 的所有特征值有正实部, 且其具有零实部的特征值仅对应单重初等因子, 则系统(1)的零解是稳定的. 若 A 有正实部的特征值, 或者有多重初等因子的零实部特征值, 则系统(1)的零解是不稳定的.

定理 2 霍尔维次定理^[2]. 考虑多项式方程 $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$, 其所有根具有负实部的充要条件为

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

当 $j > k$ 时, $a_j = 0$ 的各阶顺序主子式都大于零.

推论 1 三次多项式方程的霍尔维次判据. 考虑方程 $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$, 其所有根具有负实部

的充要条件是 $H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$. 它的各阶顺序主子式都大于零, 及 $a_1 > 0, a_2 a_1 - a_3 > 0, a_3 > 0$.

定理 3^[2] 考虑系统(1)的扰动系统

$$\frac{dX}{dt} = AX + f(t, X), \quad f(t, 0) = 0,$$

其中 $f(t, X)$ 在 $I \times U$ 上连续. 关于 X 满足 Lipschitz 条件, 且对 t 一致地有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(t, X)\|}{\|X\|} = 0$. 那么, 当没有零实部的特征值时, 系统(1)的零解与系统(2)的零解有相同的稳定性.

2 模型的建立

像乙肝一类的流行病, 都具有较高的传染性, 但传染只有当病情到达一定程度或者符合某种条件时才能发作. 所以, 把病毒携带者划分为两类. (1) 无传染性. (2) 具有传染性. 考虑到现代医学的状况, 可以忽略因病死亡的人数. 但病毒携带者经治疗后, 若不注意预防的话, 仍可能复发. 设人口输入率和正常死亡率都是常数, 且不相等. 总人口 $N = S + I_1 + I_2$, 其中 S 是易感人群数, I_1 是第 1 类人群数, I_2 是第 2 类人群数. 同时要求所有参数和函数变量都非负, 且各参数都小于 1. 根据以上分析, 可得模型框图, 如图 1 所示. 图中 λ 是人口输入率, d 是正常死亡率, α 是 $I_1 \rightarrow I_2$ 的转化率, γ 是 $I_2 \rightarrow I_1$ 的转化率, η 是 $I_1 \rightarrow S$ 的治愈率或恢复率, $\beta SI_2/N$ 是传染率. 所谓接触数是指单位时间内一个病患者与他人的接触次数(每次接触必传染). 本文假定接触数是常数 β , 而易感者比例为 S/N ³. 从而, 1 个患者在单位时间内接触易感者的数量为 $\beta S/N$, 得到全体染病者的传染率为 $\beta I_2/N$. 这种传染率称为标准传染率. 此外, 人们还提出了双线性传染率、Holling 功能性反应函数等其它传染模式^[3]. 根据图 1 的框图, 按照箭头的进出可以得到数学模型为

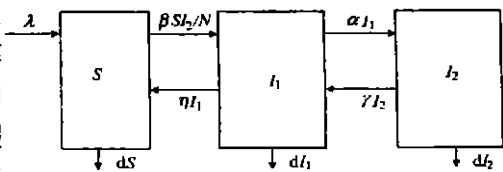


图 1 模型框图

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \lambda - dS - \frac{\beta SI_2}{N} + \eta I_1, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \frac{\beta SI_2}{N} - (\alpha + d + \eta) I_1 + \gamma I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \alpha I_1 - (\gamma + d) I_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对于这个系统模型, 我们发现若将三式相加可得 $\frac{dN}{dt} = \lambda - dN$. 在这里, 我们只比较关心易感者和第 2 类感染者. 为了易于进行讨论, 将 $I_1 = N - S - I_2$ 代入, 消去 I_1 . 从中, 得到系统(3)的等价系统为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \lambda - dS - \frac{\beta SI_2}{N} + \eta(N - I_2 - S) = P(S, I_2, N), \\ \frac{dI_2}{dt} &= \alpha(N - I_2 - S) - (\gamma + d)I_2 = Q(S, I_2, N), \\ \frac{dN}{dt} &= \lambda - dN = R(S, I_2, N). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

下面, 我们重点研究此系统的动力性状. 这是本文的主要结果.

3 系统平衡点存在性分析及再生数的定义

微分方程常数解叫做平衡解. 染病者为零的平衡点叫做无病平衡点, 染病者大于零的平衡点叫做地方病平衡点. 令系统(4)的右端等于零, 即解以下方程组

$$P(S, I_2, N) = 0, \quad Q(S, I_2, N) = 0, \quad R(S, I_2, N) = 0. \quad (5)$$

可得系统两个平衡点 $E^0: (S^0, I_2^0, N^0) = (\frac{\lambda}{d}, 0, \frac{\lambda}{d})$; $E^*: (S^*, I_2^*, N^*)$. 其中 $N^* = \frac{\lambda}{d}$, $S^* = \frac{\lambda}{d} - \frac{\alpha + \gamma + d}{\alpha} I_2^*$. 将此式代入方程组(5), 可得 $I_2^* = \frac{\alpha \lambda}{d(\alpha + \gamma + d)} - \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\eta \lambda (\gamma + d)}{\beta d(\alpha + \gamma + d)}$, 进而得 $S^* = \frac{\lambda}{\alpha \beta} (\alpha + \gamma + d + \frac{\eta(\gamma + d)}{d})$. 然而要 E^* 存在, 就必须满足 $0 \leq S^* \leq N^* = \frac{\lambda}{d}$, $0 \leq I_2^* \leq N^* = \frac{\lambda}{d}$. 将 S^*, I_2^* 的表达式代入即可解得, 需满足 $0 \leq \frac{d(\alpha + \gamma + d + \eta(\gamma + d))}{\alpha \beta} \leq 1$. 若令 $R_0 = \frac{\alpha \beta}{d(\alpha + \gamma + d + \eta(\gamma + d))}$, 则有如下定理

定理 4 当 $R_0 \leq 1$ 时, 只有平衡点 E^0 (无病平衡点); 当 $R_0 > 1$ 时, 平衡点 E^0 和平衡点 E^* (地方病平衡点)都存在. 如此, 我们就将 R_0 称作再生数^[4].

4 平衡点的稳定性分析

对于任何一种流行病,人们总是希望不管初始状态如何,它总能有一个稳定的发展趋势,而不至于给人类带来巨大危害.对于微分动力系统来说,就是不管初始值如何,其解轨线随着时间的增大,能够无限接近于某个平衡点.对于系统(4)的两个平衡点,有如下的定理.

定理 5 在系统(4)中,当 $R_0 \leq 1$ 时,只有平衡点 E^0 ,且其局部渐进稳定;当 $R_0 > 1$ 时, E^0 不稳定, E^* 局部渐进稳定.

证明 对于这两个平衡点,都可以使用系统(4)线性近似系统的特征值法,以判定它们的稳定性.令系统(4)的矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial S} = d \frac{\beta I_2}{N} - \eta & \frac{\partial P}{\partial I_2} = \frac{\beta S}{N} - \eta & \frac{\partial P}{\partial N} = \frac{\beta S I_2}{N^2} + \eta \\ \frac{\partial Q}{\partial S} = -\alpha & \frac{\partial Q}{\partial I_2} = -(\alpha + \gamma + d) & \frac{\partial Q}{\partial N} = \alpha \\ \frac{\partial R}{\partial S} = 0 & \frac{\partial R}{\partial I_2} = 0 & \frac{\partial R}{\partial N} = -d \end{bmatrix}. \tag{6}$$

若令 J^0 是将矩阵(6)中的 S, I_2, N 分别用 S^0, I_2^0, N^0 替换后得到的矩阵,则可得到平衡点 E^0 对应的特征方程.即 $|\lambda E - J^0| = 0$ (E 是单位矩阵,是特征值),它等价于 $(\lambda - d)[(\lambda + d + \frac{\beta I_2^0}{N^0} + \eta)(\lambda + \alpha + \gamma + d) - \alpha \frac{\beta S^0}{N^0} - \eta] = 0$. 将前面解得的 S^0, I_2^0, N^0 代入,可得 $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$. 其中 $a_1 = \alpha + \gamma + 3d + \eta$, $a_2 = 2\alpha d + (\gamma + d)(d + \eta) - \alpha\beta + \gamma d + 2d^2 + \eta d$, $a_3 = d[d(\alpha + \gamma + d) + \eta(\gamma + d) - \alpha\beta]$. 由此代入并化简,可得 $a_1 a_2 - a_3 = (\alpha + \gamma + 3d + \eta)[d(\alpha + \gamma + d) + \eta(\gamma + d) - \alpha\beta] + d(\alpha d + \gamma^2 + 3\gamma d + 2d^2 + \alpha\beta) + d(\alpha + d + \eta)(\alpha + \gamma + 3d + \eta)$. 因此,根据推论 1 及定理 1 有,当 $R_0 > 1$ 时,因 $a_3 < 0$,故而 E^0 不稳定;当 $R_0 \leq 1$ 时,因 $a_1 a_2 - a_3 > 0, a_3 > 0$,故而 E^0 局部渐进稳定.同理,令 J^* 是将矩阵(6)中的 S, I_2, N 分别用 S^*, I_2^*, N^* 替换后得到的矩阵.那么,可得到平衡点 E^* 对应的特征方程为 $|\lambda E - J^*| = 0$ (E 是单位矩阵, λ 是特征值).它等价于 $(\lambda - d)[(\lambda + d + \frac{\beta I_2^*}{N^*} + \eta)(\lambda + \alpha + \gamma + d) - \alpha(\frac{\beta S^*}{N^*} + \eta)] = 0$. 将前面解得的 S^*, I_2^*, N^* 代入,可得 $\lambda^3 + a_1^* \lambda^2 + a_2^* \lambda + a_3^* = 0$, 其中

$$\left. \begin{aligned} a_1^* &= \alpha + \gamma + 2d + \eta + \frac{\alpha\beta - \eta(\gamma + d)}{\alpha + \gamma + d}, \\ a_2^* &= \alpha\beta - \eta(\gamma + \frac{d(\alpha\beta - d(\gamma + d))}{\alpha + \gamma + d}), \\ a_3^* &= d[\alpha\beta - d(\alpha + \gamma + d) - \eta(\gamma + d)]. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

经过化简,可得

$$a_1^* a_2^* - a_3^* = \frac{d(\alpha\beta - d(\gamma + d))}{\alpha + \gamma + d}(\alpha + \gamma + d + \eta + \frac{\alpha\beta - \eta(\gamma + d)}{\alpha + \gamma + d} + \alpha + \gamma + d + \eta + \frac{\alpha\beta - \eta(\gamma + d)}{\alpha + \gamma + d})(\alpha\beta - \eta\gamma) + d^2(\alpha + \gamma + d + \eta). \tag{8}$$

很明显,当 $R_0 > 1$ 也即 E^* 存在时,有

$$\frac{d(\alpha\beta - d(\gamma + d))}{\alpha + \gamma + d} > 0, \quad \frac{\alpha\beta - \eta(\gamma + d)}{\alpha + \gamma + d} > 0, \quad \alpha\beta - \eta\gamma > 0. \tag{9}$$

此时, $a_1^* > 0, a_1^* a_2^* - a_3^* > 0, a_3^* > 0$. 根据推论(1)并结合定理 3 可知,当 $R_0 > 1$ 时, E^* 局部渐进稳定;当 $R_0 \leq 1$ 时, E^* 不存在. 定理证毕.

5 数值模拟

根据实际情况,提供一组取值为 $\lambda = 0.075, d = 0.04, \eta = 0.25, \alpha = 0.5$ 和 $\gamma = 0.3$ 的模型参数,进

行相应的数值模拟. 先令 $\beta=0.15$, 此时 $R_0=0.6324<1$. 为了读者看得更清晰, 将模型解轨线分别投影到 $I-N$, $S-N$, $I-S$ 的 3 个平面上. 这样就可以看到它随时间变化的走势, 以及在无病平衡点附近的渐进行为, 如图 2 所示. 再令 $\beta=0.3$, 此时 $R_0=1.2648>1$. 对解轨在 $S-I$ 平面上的投影, 进行极坐标和平

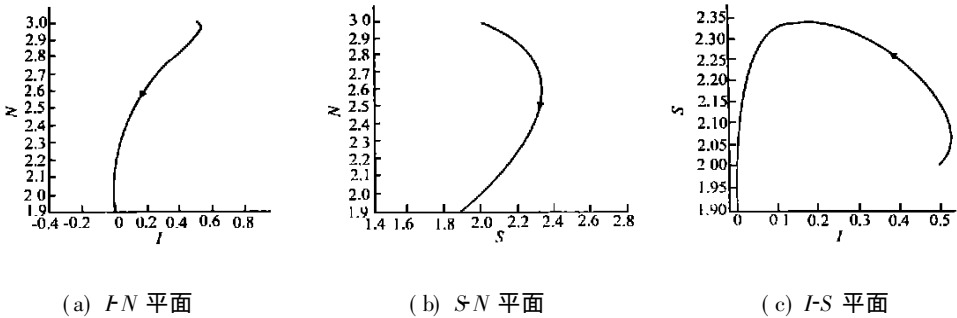


图 2 解轨线在 3 个不同平面上的投影

行变换后的图像, 如图 3 所示. 从图中可以看, 到在地方病平衡点处的渐进行为. 根据本文的结论, 可以适当调节各个参数, 使得再生数满足 $R_0\leq 1$, 以及系统仅有无病平衡点. 因为它存在稳定, 故可使系统随时间推移趋向它, 即流行病灭绝. 例如, 我们可使 β 足够小, 这样也就减小了传染率. 在实践中, 可以通过隔离病毒感染者等措施实现.

由于三维问题的复杂性, 本文仅对系统的局部渐进性进行讨论, 而未涉及全局性状. 我们曾尝试通过构造李雅普洛夫函数来解决这一问题, 但未能成功. 另外, 我们还对模型稍作变化, 其框图如图 4 所

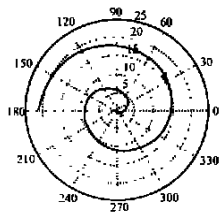


图 3 $S-I$ 面上有关图像

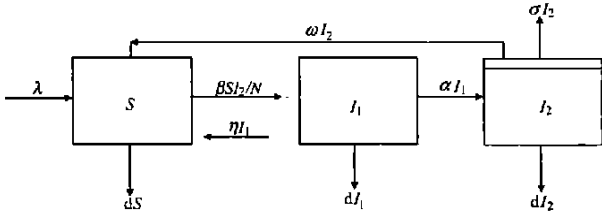


图 4 模型改进框图

示. 此模型可适用于曾在全世界, 特别是我国流行的 SARS 传染病. 图中, I_1 是疑似人群, I_2 是 SARS 人群, σ 是因病死亡率, ω 是治愈率, η 是疑似人群中非 SARS 病人的排除率, 其它参数与模型(3)相同. 对于新模型, 也可作类似本文的讨论, 在此不再赘述.

参 考 文 献

1 马知恩. 常微分方程定性稳定性方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001. 68~ 72
2 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996. 379~ 380
3 马知恩. 种群动力学与流行病动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2000. 31~ 34
4 陈兰荪. 数学生态学模型与研究主张[M]. 北京: 科学出版社, 1988. 45~ 47

Dynamic Model of a Class of Special Epidemic Diseases
and Analysis of Its Dynamical Character

Li Hao

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract Aiming at the spread mechanism of a class of epidemic diseases similar to hepatitis B, an ordinary differential dynamical model is established. By studying its dynamical stability is carefully studied. A fairly ideal conclusion is obtained.

Keywords epidemic disease, endemic disease, stability, equilibrium point of anosis, equilibrium point of endemic disease, locally asymptotic stability, reproducing number