第 25 卷 第 1 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 25 No. 1
2004 年 1 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jan. 2004

文章编号 1000-5013(2004)01-0014-04

解双抛物型方程的两类恒稳差分格式

曾　文　平

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要　提出解双抛物型方程的两类新的具三对角线型系数矩阵的三层隐式差分格式,其局部截断误差阶分别为 $O(\tau^2+h^2+\frac{\tau}{h})$ 及 $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)$. 它们都是绝对稳定的且可用追赶法求解. 数值例子表明这些格式是有效的,理论分析是正确的.

关键词　双抛物型方程, 绝对稳定, 隐式差分格式
中图分类号　O 241.82　　文献标识码　A

考虑高阶抛物型方程初值问题

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{1}$$

它具初始条件为

$$\lim_{t\to 0} u=\begin{cases} f_1(x), & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1],\end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\begin{cases} f_2(x), & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases} \tag{3}$$

如果初始条件 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的, 问题(1)~(3)的精确解将表示为

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^1[f_1(\zeta)-tf_2(\zeta)]\mathrm{e}^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4t}}\mathrm{d}\zeta. \tag{4}$$

Saul'yev[1]在 1964 年提出了解问题(1)~(3)的标准的简单三对角线型隐式差分格式

$$\frac{\delta_t^2 u_j^n}{\tau^2}+\frac{\delta_x^4 u_j^n}{h^4}-\frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}-\delta_x^2 u_j^{n-1}}{\tau h^2}=0, \tag{5}$$

其中 τ 和 h 分别为时间和空间步长, δ_t^2, δ_x^2 与 δ_x^4 分别表示关于 t 或 x 的二阶中心差分算子和关于 x 的四阶中心差分算子. 格式(5)的局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2)$, 而其稳定性条件为 $r=\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2}$ 是较为苛刻的. 随后, 刘发旺[2]于 1990 年提出含有稳定参数 α 的五对角线型隐式差分格式

$$\frac{\delta_t^2 u_j^n}{\tau^2}+\alpha\frac{\delta_x^4 u_j^{n+1}}{h^4}+(1-2\alpha)\frac{\delta_x^4 u_j^n}{h^4}+\alpha\frac{\delta_x^4 u_j^{n-1}}{h^4}-\frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}-\delta_x^2 u_j^{n-1}}{\tau h^2}=0,\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{6}$$

它的局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2)$. 当 $\frac{1}{4}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时, 它是无条件稳定的. 而当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{4}$ 时, 其稳定性条件为 $r=\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{1-4\alpha}}$. 虽然格式(6)的稳定性条件比格式(5)放宽了, 但却需解五对角线型方程组, 比格式(5)麻烦得多. 本文目的在于导出两种三对角线型、无条件稳定的差分格式, 即兼具格式(5), (6)的优点. 它使得稳定性条件大为放宽而又只需解三对角线型方程组, 因而简单易行.

收稿日期　2003-07-22
作者简介　曾文平(1940-), 男, 教授. 主要从事偏微分方程数值解和数值代数的研究. E-mail: zengwp@hqu.edu.cn
基金项目　国务院侨务办公室科研基金资助项目(02QZR07)

1　三对角线型差分格式的构造

(1) 格式(Ⅰ). 若记

$$L_h u_j^n \equiv \frac{1}{h^4}\{u_{j+2}^n - 4\frac{u_{j+1}^{n+1}+u_{j+1}^n}{2} + 6\frac{u_j^{n+1}+u_j^{n-1}}{2} - 4\frac{u_{j-1}^n+u_{j-1}^{n-1}}{2} + u_{j-2}^n\} \equiv$$
$$\frac{1}{h^4}\{(u_{j+2}^n+u_{j-2}^n) - 2(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n) - 2(u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n-1}) + 3(u_j^{n+1}+u_j^{n-1})\},$$

则它在(x_j, t_n)处的Taylor 展开为

$$L_h u_j^n = (\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_j^n - \frac{4\tau h}{h^4}(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x})_j^n + \frac{\tau^2}{h^4}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})_j^n + O(h^2 + (\frac{\tau}{h})). \tag{7}$$

将式(7)右端第 2, 3 两项移至等式左端, 并用相应的中心差商加以离散化可得

$$(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_j^n = L_h u_j^n + \frac{4\tau h}{h^4}(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x})_j^n - \frac{\tau^2}{h^4}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})_j^n + O(h^2 + (\frac{\tau}{h})) = L_h u_j^n +$$
$$\frac{4\tau h}{h^4}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^{n-1}}{4\tau h} - \frac{\tau^2}{h^4}\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} + O(h^2 + (\frac{\tau}{h})). \tag{8}$$

由此, 对方程(1) 建立隐式差分格式(Ⅰ)为

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} + \frac{1}{h^4}\{(u_{j+2}^n + u_{j-2}^n) - 2(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) -$$
$$2(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n-1}) + 3(u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) -$$
$$(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}) - \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})}{\tau h^2} = 0. \tag{9}$$

式(9)的局部截断误差阶为 $O(\tau^2 + h^2 + (\frac{\tau}{h}))$. 若令 $r = \tau/h^2$, $J = \frac{1}{h}$, 且令

$$f_j^n = 2u_j^n - u_j^{n-1} - r^2\{(u_{j+2}^n + 2u_j^n + u_{j-2}^n) - 2(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)\} +$$
$$(r^2 - r)(u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}). \tag{10}$$

那么, 格式(9)可写成

$$-(r + r^2)u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2r + 2r^2)u_j^{n+1} - (r + r^2)u_{j+1}^{n+1} = f_j^n, \qquad j = 1, 2, \cdots, J-1. \tag{11}$$

(2) 格式(Ⅱ). 为了提高差分格式的稳定性, 引入人工粘性项 $2r\tau\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}$, 使方程(1)成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 2r\tau\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}. \tag{12}$$

然后对它加以离散化, 可得隐式差格式(Ⅱ)为

$$\frac{\delta_t^2 u_j^n}{\tau^2} + \frac{\delta_x^4 u_j^n}{h^4} - \frac{\delta_x^2 u_j^{n+1} - \delta_x^2 u_j^{n-1}}{\tau h^2} = \frac{2}{h^4}\delta_x^2(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}). \tag{13}$$

同样地, 在点(x_j, t_n)处进行Taylor 展开, 可得格式(13)的局部截断误差阶为

$$R_j^n = \frac{\tau^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_j^n + \frac{h^2}{6}(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6})_j^n - \frac{h^2}{6}(\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4})_j^n - \frac{\tau^2}{3}(\frac{\partial^5 u}{\partial t^3\partial x^2})_j^n - 2(\frac{\tau}{h})^2(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2})_j^n -$$
$$\frac{\tau^2}{6}(\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4})_j^n + O(\tau^4 + h^4 + \tau^2 h^2) = O(\tau^2 + h^2 + (\frac{\tau}{h})^2). \tag{14}$$

若记

$$g_j^n = 2u_j^n - u_j^{n-1} - r^2\delta_x^4 u_j^n - 4r^2\delta_x^2 u_j^n - r\delta_x^2 u_j^{n-1} + 2r^2\delta_x^2 u_j^{n-1}, \tag{15}$$

则格式(13)可改写为

$$-(r + 2r^2)u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2r + 4r^2)u_j^{n+1} -$$
$$(r + 2r^2)u_{j+1}^{n+1} = g_j^n, \qquad j = 1, 2, \cdots, J-1. \tag{16}$$

显然, 假如边界条件已知(即 u_0^{n+1} 及 u_J^{n+1} 为已知), 则方程组(11), (16)(从而格式(Ⅰ), (Ⅱ)), 都是一个具三对角线型系数矩阵的线性方程组, 且其系数矩阵是严格对角占优的, 因此, 可用(三对角线型)追

赶法容易地求解.

2 稳定性分析

引理[3] 实系数二次方程 $Ax^2+Bx+C=0(A>0)$ 的两根,按模小于等于1的充要条件为 $A-C\geqslant 0$, $A+B+C\geqslant 0$, 且 $A-B+C\geqslant 0$. 现用Fourier分析法研究差分格式的稳定性. 首先有 $e^{-ij\theta}\delta_x^2 e^{ij\theta}=-4s^2$, $e^{-ij\theta}\delta_x^4 e^{ij\theta}=16s^4$, $(|\theta|<\Pi)$, 其中 $i=\sqrt{-1}$, $s=\sin\dfrac{\theta}{2}$.

将三层差分格式(Ⅰ)或格式(Ⅱ)写成等价的两层格式后,用Fourier方法易得坛长矩阵为

$$\boldsymbol{G}(\Delta t,j)=\begin{bmatrix}-B/A & -C/A\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

其特征方程为 $A\lambda^2+B\lambda+C=0$. (1) 格式(Ⅰ)(即格式(9)). 这时特征方程中的系数为 $A=1+4rs^2+4r^2s^2>0$, $B=-2-8r^2s^2\cos\theta$, $C=1-4rs^2+4r^2s^2$. 显然,对任意 $r>0$ 均有 $A-C=8rs^2\geqslant 0$, $A+B+C=8r^2s^2(1-\cos\theta)=16r^2s^4\geqslant 0$, $A-B+C=4+8r^2s^2(1+\cos\theta)=4+16r^2s^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}>0$. 因而满足引理条件. 由引理结论知特征方程的两根按模小于等于1. 即Von Neumann条件成立. 因此,由文[4]我们有如下定理.

定理1 高阶抛物型方程的初边值问题的三层隐式格式(Ⅰ),至少在Forsythe-Wasow意义下绝对稳定. (2) 格式(Ⅱ)(即格式(13)). 这时特征方程中的系数为 $A=1+4rs^2+8r^2s^2>0$, $B=-2-16r^2s^2+16r^2s^4$, $C=1-4rs^2+8r^2s^2$. 显然,对任意 $r>0$ 均有 $A-C=8rs^2\geqslant 0$, $A+B+C=16r^2s^4\geqslant 0$, $A-B+C=4+32r^2s^2-16r^2s^4=4+16r^2s^2(2-s^2)>0$. 因而满足引理条件. 由引理结论知特征方程的两根按模小于等于1. 即Von Neumann条件成立. 于是,可得如下定理.

定理2 高阶抛物型方程的初边值问题的三层隐式格式(Ⅱ),至少在Forsythe-Wasow意义下绝对稳定.

3 数值试验

考虑方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \qquad \lim_{t\to 0}u=0,\\ &\lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\begin{cases}2, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

其精确解为

$$u(x,t)=-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4t}}d\zeta.\tag{18}$$

对于数值方法的边界条件,可在式(18)中令 $x=0$ 和 $x=1$ 得到. 对于定积分,可用Simpson公式求解. 分别取 $h=0.1$, $r=0.5$, $\tau=rh^2=0.05$; $h=0.1$, $r=1$, $\tau=0.01$; $h=0.1$, $r=2$, $\tau=0.02$. 按格式(Ⅰ),(Ⅱ)进行计算到 $t=0.6, 0.8$ 及 1.0, 列出 $x=0.1, 0.3. 0.5, 0.7$ 及 0.9 的值与精确解的值列表比较(表1). 实验表明,本文所提方法计算简单、工作量少、方法可行. 本文方法比文[2]方法精度更高.

表1 数值结果比较表

t	解与格式	$x=0.1$	$x=0.3$	$x=0.5$	$x=0.7$	$x=0.9$
			$h=0.1$ $r=0.5$,	$\tau=rh^2=0.005$		
	精确解	−0.396 853 0	−0.415 795 3	−0.422 307 8	−0.415 795 3	−0.396 853 0
0.6	格式(Ⅰ)	−0.396 855 1	−0.415 803 3	−0.422 318 8	−0.415 803 3	−0.396 855 1
	格式(Ⅱ)	−0.396 855 4	−0.415 804 8	−0.422 320 8	−0.415 804 8	−0.396 855 4
	精确解	−0.468 996 8	−0.485 988 2	−0.491 787 5	−0.485 988 2	−0.468 996 8
0.8	格式(Ⅰ)	−0.468 997 1	−0.485 989 6	−0.491 789 4	−0.485 989 6	−0.468 997 1
	格式(Ⅱ)	−0.468 996 6	−0.485 987 6	−0.491 786 7	−0.485 987 6	−0.468 996 6

续表

t	解与格式	$x=0.1$	$x=0.3$	$x=0.5$	$x=0.7$	$x=0.9$
			$h=0.1$　$r=0.5$,	$\tau=rh^2=0.005$		
	精确解	−0.513 853 7	−0.547 378 0	−0.552 652 8	−0.547 378 0	−0.531 853 7
1.0	格式(Ⅰ)	−0.531 854 0	−0.547 379 0	−0.552 654 1	−0.547 379 0	−0.531 854 0
	格式(Ⅱ)	−0.531 853 7	−0.547 378 1	−0.552 652 9	−0.547 378 1	−0.531 853 7
			$h=0.1$　$r=1$,	$\tau=rh^2=0.001$		
	精确解	−0.396 853 0	−0.415 795 3	−0.422 307 8	−0.415 795 3	−0.396 853 0
0.6	格式(Ⅰ)	−0.396 856 9	−0.415 811 3	−0.422 329 9	−0.415 811 3	−0.396 856 9
	格式(Ⅱ)	−0.396 863 7	−0.415 838 8	−0.422 367 7	−0.415 838 8	−0.396 863 7
	精确解	−0.468 996 8	−0.485 988 2	−0.491 787 5	−0.485 988 2	−0.468 996 8
0.8	格式(Ⅰ)	−0.468 995 5	−0.485 983 0	−0.491 780 4	−0.485 983 0	−0.468 995 5
	格式(Ⅱ)	−0.468 992 5	−0.485 970 9	−0.491 763 9	−0.485 970 9	−0.468 992 5
	精确解	−0.513 853 7	−0.547 378 0	−0.552 652 8	−0.547 378 0	−0.531 853 7
1.0	格式(Ⅰ)	−0.531 853 3	−0.547 376 4	−0.552 650 6	−0.547 376 4	−0.531 853 3
	格式(Ⅱ)	−0.531 852 5	−0.547 373 4	−0.552 646 5	−0.547 373 4	−0.531 852 5
			$h=0.1$　$r=2$,	$\tau=rh^2=0.002$		
	精确解	−0.396 853 0	−0.415 795 3	−0.422 307 8	−0.415 795 3	−0.396 853 0
0.6	格式(Ⅰ)	−0.396 891 2	−0.415 947 6	−0.422 516 1	−0.415 947 6	−0.396 891 2
	格式(Ⅱ)	−0.396 935 9	−0.416 086 3	−0.422 683 4	−0.416 086 3	−0.396 935 9
	精确解	−0.468 996 8	−0.485 988 2	−0.491 787 5	−0.485 988 2	−0.468 996 8
0.8	格式(Ⅰ)	−0.468 984 2	−0.485 939 5	−0.491 721 5	−0.485 939 5	−0.468 984 2
	格式(Ⅱ)	−0.469 001 8	−0.486 028 5	−0.491 851 7	−0.486 028 5	−0.469 001 8
	精确解	−0.513 853 7	−0.547 378 0	−0.552 652 8	−0.547 378 0	−0.531 853 7
1.0	格式(Ⅰ)	−0.531 851 1	−0.547 367 4	−0.552 638 0	−0.547 367 4	−0.531 851 1
	格式(Ⅱ)	−0.531 829 4	−0.547 273 9	−0.552 506 9	−0.547 273 9	−0.531 829 4

参　考　文　献

1 Saul'yev V K. Integration of Equation of parabolic type by the method of nets, translated by tee[M]. New York: G. J. Pergamon Press, 1966. 152~153

2 刘发旺. 解高阶抛物型方程的群显方法[J]. 数值计算与计算机应用, 1990, (1): 1~9

3 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis[J]. J. Inst. Math. Applics, 1971, (8). 397~406

4 Forsythe G E, Wasow W R. Finite-difference methods for partial differential equation[M]. New York: John Wiley & Sons, 1960. 73~95

Two Classes of Steady Difference Schemes for Solving Biparabolic Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　For solving biparabolic equation, the author presents two new classes of three layered implicit difference schemes with tridigonal matrix of coefficients. Their local truncation errors are in the order of $O(\tau^2+h^2+\frac{\tau}{h})$ and $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)$ respectively. They are all absolutely stable and can be solved by speedup method. These schemes are shown by numerical example to be effective.

Keywords　biparabolic equation, absolutely stable, implicit difference scheme