第 25 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 25 No. 1
2004 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2004

文章编号 1000-5013(2004)01-0010-04

一类高维概周期系统的不稳定概周期解

方聪娜 王全义

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 研究一类高维概周期系统的概周期解问题. 利用指数型二分性和 Lyapunov 泛函方法, 得到一些关于该类系统概周期解的存在性、唯一性及不稳定性的新结果.

关键词 概周期解, 存在性, 唯一性, 不稳定性

中图分类号 O 175.1 文献标识码 A

1 问题的提出

文[1]利用重合度理论的延拓定理和 Lyapunov 泛函方法, 研究具有有界分布滞量的周期微分系统

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \int_{-r}^{0} \boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x}(t+s))\mathrm{d}s, \tag{1}$$

及其周期解的存在性和全局吸引性问题. 本文将研究一类具有无穷时滞的高维概周期系统, 即

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x}(t+s))\mathrm{d}s, \tag{2}$$

及其概周期解的存在性、唯一性及不稳定性的问题. 式中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $n \times n$ 连续函数矩阵, $(t, s, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R} \times (-\infty, 0] \times \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})$ 是 n 维连续函数向量. $\int_{-\infty}^{0} \|\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})\| \mathrm{d}s$ 关于 $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R} \times D_1$ 一致收敛, 其中 D_1 为 $\mathbf{R}^n$ 中的任一紧集. 又 $\boldsymbol{A}(t)$ 关于 t 是概周期的, $\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})$ 关于 t 对 $(s, \boldsymbol{x}) \in S_1 \times S_2$ (其中 S_1, S_2 分别为 $(-\infty, 0]$, $\mathbf{R}^n$ 中的任一紧集) 是一致概周期的. 利用指数型二分性和 Lyapunov 泛函方法, 得到了一些关于系统(2)概周期解的存在性、唯一性及不稳定性的新结果.

2 定义与引理

在本文中, 恒设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正定实对称常数方阵, 并以 $r_{\mathrm{M}}, r_{\mathrm{m}}$ 分别表示 $\boldsymbol{P}$ 的最大、最小的特征根.

定义 1 设 $g(t)$ 是 t 的概周期函数, 则

$$g^{+}(t) = \frac{1}{2}[g(t) + |g(t)|] = \max(g(t), 0) \geqslant 0,$$

$$g^{-}(t) = \frac{1}{2}[g(t) - |g(t)|] = \min(g(t), 0) \leqslant 0.$$

它们都是 t 的概周期函数, 并且 $g(t) = g^{+}(t) + g^{-}(t)$. 现对 n 阶正定实对称常数方阵 $\boldsymbol{P}$ 和概周期函数 $g(t)$, 定义其函数.

定义 2

$$L[t, -g, \boldsymbol{P}] = -\left[\frac{g^{+}(t)}{r_{\mathrm{M}}} + \frac{g^{-}(t)}{r_{\mathrm{m}}}\right],$$

收稿日期 2003-06-25

作者简介 方聪娜(1977-), 女, 硕士, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究; 现为集美大学基础教学部(361021 福建 厦门)助教. E-mail: fcn1002@sina.com

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(01QZR02)

易见 $L[t, -g, \boldsymbol{P}]$ 是 t 的概周期函数.

考虑概周期系统

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{3}$$

这里, $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $n\times n$ 连续函数矩阵且关于 t 是概周期的. 记 $\frac{\boldsymbol{PA}(t)+\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{P}}{2}$ 的 n 个特征根 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_n(t)$ 的最小特征根为 $\lambda_m(t)$, 显然它关于 t 是概周期的. 这里 $\boldsymbol{A}^*(t)$ 为 $\boldsymbol{A}(t)$ 的转置. 类似于文[2]中引理 2.1 的证明可以得到下列引理.

引理 1　设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是式(3)的基本解矩阵, 则有

$$\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\| \leqslant \sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\exp\left(\int_t^s L[\tau, -\lambda_m, \boldsymbol{P}]\mathrm{d}\tau\right), \qquad s\geqslant t.$$

类似于文[3]中引理 1 的证明, 可以得到下列引理.

引理 2　设 $\boldsymbol{f}_1(t)$, $g(t)$ 都是 t 的概周期函数, 如果 $\forall t\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{f}_1(t)\leqslant g(t)$, 则有

$$\boldsymbol{f}_1^+(t)\leqslant g^+(t), \qquad \boldsymbol{f}_1^-(t)\leqslant g^-(t), \tag{i}$$

$$L[t, -\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{P}]\geqslant L[t, -g, \boldsymbol{P}]. \tag{ii}$$

特别地, 若存在概周期函数 $a(t)$, 使对 $\forall t\in\mathbf{R}$ 有 $\lambda_m(t)\geqslant a(t)$. 则由引理 2 即知, 必有

$$\lambda_m^+(t)\geqslant a^+(t), \quad \lambda_m^-(t)\geqslant a^-(t),$$

$$L[t, -\lambda_m, \boldsymbol{P}]\leqslant L[t, -a, \boldsymbol{P}].$$

记 $B=\{\boldsymbol{V}\mid \boldsymbol{V}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 为概周期函数$\}$, 则 B 在范数 $\|\boldsymbol{V}\|=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}\{\|\boldsymbol{V}(t)\|\}$ 下是一个 Banach 空间.

3　主要结果及其证明

定理 1　如果存在 n 阶正定实对称常数方阵 $\boldsymbol{P}$ 及定义在 $(-\infty, 0]$ 上的连续函数 $h(s)\geqslant 0$, 它满足 $\int_{-\infty}^0(-s)\cdot h(s)\mathrm{d}s<+\infty$. 则同时存在常数 $a>M$ 并使得: (1) $\lambda_m(t)\geqslant a$; (2) $\|\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{y})\|$

$\leqslant h(s)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$. 其式中 $M=\max\left\{\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\cdot r_M\beta_1, \beta_1\|\boldsymbol{P}\|\right\}$, $\beta_1=\int_{-\infty}^0 h(s)\mathrm{d}s$, $\|\boldsymbol{P}\|=\|(p_{ij})_{n\times n}\|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n|p_{ij}|^2}\right)$, 则系统(2)存在唯一的不稳定的概周期解.

证明　任取 $\boldsymbol{V}\in B$, 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\int_{-\infty}^0\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))\mathrm{d}s. \tag{4}$$

因为 $\boldsymbol{V}\in B$, 所以 $\boldsymbol{V}(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界的. 故存在正数 N, 使得 $\forall t\in\mathbf{R}$ 有 $\|\boldsymbol{V}(t)\|\leqslant N$, 记 $\mathbf{R}_N=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant N\}$. 由于 $\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})\|\mathrm{d}s$ 关于 $(t, \boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_N$ 是一致收敛的. 因此, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $T_1=T_1(\varepsilon)<0$ 使得对 $\forall(t, \boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_N$ 有

$$\int_{-\infty}^{T_1}\|\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})\|\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

又因为 $\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})$ 关于 t 对 $(s, \boldsymbol{x})\in S_1\times S_2$ (其中 S_1, S_2 分别为 $(-\infty, 0]$, $\mathbf{R}^n$ 中的任一紧集), 是一致概周期的. 所以, $\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))$ 关于 t 对 $s\in S_1$ (其中 S_1 为 $(-\infty, 0]$ 中的任一紧集) 是一致概周期的. 从而, 对 $\frac{\varepsilon}{-3T_1}>0$ 和 $S_1=[T_1, 0]$, 存在正数 $l\left(\frac{\varepsilon}{-3T_1}, S_1\right)$. 它使得任一长度为 $l\left(\frac{\varepsilon}{-3T_1}, S_1\right)$ 的区间至少含有一个 τ, 使得

$$\|\boldsymbol{f}(t+\tau, s, \boldsymbol{V}(t+\tau+s))-\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))\|<\frac{\varepsilon}{-3T_1}.$$

对于所有 $t\in\mathbf{R}$ 和所有 $s\in S_1$ 成立. 又由式(5) 可知, 对所有 $t\in\mathbf{R}$ 有

$$\int_{-\infty}^{T_1}\|\boldsymbol{f}(t+\tau, s, \boldsymbol{V}(t+\tau+s))\|\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{T_1}\|\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))\|\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{3}.$$

所以，对所有 $t\in\mathbf{R}$ 有

$$\|\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{f}(t+\tau, s, \boldsymbol{V}(t+\tau+s))\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))\mathrm{d}s\|\leqslant$$
$$\int_{-\infty}^{T_1}\|\boldsymbol{f}(t+\tau, s, \boldsymbol{V}(t+\tau+s))\|\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{T_1}\|\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))\|\mathrm{d}s+$$
$$\int_{T_1}^{0}\|\boldsymbol{f}(t+\tau, s, \boldsymbol{V}(t+\tau+s))-\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))\|\mathrm{d}s<$$
$$\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{-3T_1}\cdot(-T_1)=\varepsilon.$$

因为 T_1, S_1 只与 ε 有关，所以 $l(\frac{\varepsilon}{-3T_1}, S_1)$ 只与 ε 有关. 于是 $\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{V}(t+s))\mathrm{d}s$ 关于 t 是概周期.

设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是线性方程

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

的基本解矩阵. 那么，由条件(i)及引理1，2可得

$$\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\|\leqslant\sqrt{\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}}\exp(\int_t^s L[\tau, -\lambda_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{P}]\mathrm{d}\tau\leqslant\sqrt{\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}}\exp(\int_t^s L[\tau, -a, \boldsymbol{P}]\mathrm{d}\tau=$$
$$\sqrt{\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{a}{r_{\mathrm{M}}}(s-t)},\qquad s\geqslant t.$$

故线性方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},$$

它在 $\mathbf{R}$ 上具有指数型二分性. 所以，由定理7.7[4]及其证明，可知方程(4)存在唯一的概周期解. 并且，它可以表示为

$$\boldsymbol{x}_V(t)=-\int_t^{+\infty}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)(\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{f}(s, \tau, \boldsymbol{V}(s+\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s.$$

现在定义算子 $F: B\rightarrow B$ 如下式，即

$$F\boldsymbol{V}(t)=\boldsymbol{x}_v(t),\ \forall\ \boldsymbol{V}\in B.$$

下面证明 F 是 B 上的压缩映射. 事实上，对 $\forall\ \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2\in B$，由条件(i)，(ii)有

$$\|F\boldsymbol{V}_1(t)-F\boldsymbol{V}_2(t)\|=$$
$$\|\int_t^{+\infty}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)(\int_{-\infty}^{0}(\boldsymbol{f}(s, \tau, \boldsymbol{V}_1(s+\tau))-\boldsymbol{f}(s, \tau, \boldsymbol{V}_2(s+\tau)))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\|\leqslant$$
$$\int_t^{+\infty}\sqrt{\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{r_{\mathrm{M}}}(s-t)}(\int_{-\infty}^{0}h(\tau)\|\boldsymbol{V}_1(s+\tau)-\boldsymbol{V}_2(s+\tau)\|\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\sqrt{\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}}\cdot\frac{r_{\mathrm{M}}}{a}\int_{-\infty}^{0}h(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|.$$

从而，$\|F\boldsymbol{V}_1-F\boldsymbol{V}_2\|\leqslant\sqrt{\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}}\cdot\frac{r_{\mathrm{M}}}{a}\int_{-\infty}^{0}h(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|$. 于是，由条件即知 F 是 B 上的压缩映射. 利用压缩映射原理知，F 在 B 中存在唯一的不动点，即系统(2)存在唯一的概周期解 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$. 下面再证明 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ 是不稳定的.

事实上，设 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ 具有有界连续初始函数 $\Psi: (-\infty, t_0]\rightarrow\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}(t)$ 为系统(2)的具有有界连续初始函数 $\varphi: (-\infty, t_0]\rightarrow\mathbf{R}^n$ 的解. 令 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\bar{\boldsymbol{x}}(t)$，构造 Lapunov 泛函

$$w(t)=\boldsymbol{y}^*(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t)-\|\boldsymbol{P}\|\int_{-\infty}^{0}h(s)(\int_{t+s}^{t}\|\boldsymbol{y}(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant t_0.$$

显然, 由 $h(s)$ 的条件可知 $w(t)$ 是存在的. 计算 $w(t)$ 沿着式(2)的解的导数

$$w'_{(2)}(t) = (\boldsymbol{y}'(t))^* \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{y}^*(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}'(t) - \|\boldsymbol{P}\|\int_{-\infty}^{0} h(s)(\|\boldsymbol{y}(t)\|^2 - \|\boldsymbol{y}(t+s)\|^2)\mathrm{d}s \geqslant 2a\|\boldsymbol{y}(t)\|^2 - 2\int_{-\infty}^{0} h(s)ds \cdot \|\boldsymbol{P}\| \cdot \|\boldsymbol{y}(t)\|^2 = 2(a - \beta_1\|\boldsymbol{P}\|) \cdot \|\boldsymbol{y}(t)\|^2.$$

也即

$$w'_{(2)}(t) \geqslant 2(a - \beta_1\|\boldsymbol{P}\|) \cdot \|\boldsymbol{y}(t)\|^2. \tag{6}$$

将式(6)两边从 t_0 到 t 积分, 可得

$$w(t) \geqslant 2(a - \beta_1\|\boldsymbol{P}\|)\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{y}(s)\|^2\mathrm{d}s + w(t_0), \qquad t \geqslant t_0.$$

于是

$$r_{\mathrm{M}}\|\boldsymbol{y}(t)\|^2 \geqslant \boldsymbol{y}^*(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t) \geqslant w(t) \geqslant 2(a - \beta_1\|\boldsymbol{P}\|) \cdot \int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{y}(s)\|^2\mathrm{d}s + w(t_0), \qquad t \geqslant t_0. \tag{7}$$

所以, 对任给 $\delta > 0$, 我们可以选择有界连续初始函数 $\varphi: (-\infty, t_0] \to \mathbf{R}^n$, 使得 $\|\Psi(t) - \varphi(t)\| < \delta(t \in (-\infty, t_0])$, 且 $w(t_0) > 0$. 又由式(7)得

$$\|\boldsymbol{y}(t)\|^2 \geqslant \frac{w(t_0)}{r_{\mathrm{M}}}, \qquad t \geqslant t_0.$$

所以

$$r_{\mathrm{M}}\|\boldsymbol{y}(t)\|^2 \geqslant w(t) \geqslant 2(a - \beta_1\|\boldsymbol{P}\|)\int_{t_0}^{t}\frac{w(t_0)}{r_{\mathrm{M}}}\mathrm{d}s + w(t_0) = w(t_0) + 2(a - \beta_1\|\boldsymbol{P}\|) \cdot \frac{w(t_0)}{r_{\mathrm{M}}} \cdot (t - t_0), \qquad t \geqslant t_0.$$

故当 $t \to +\infty$时, $\|\boldsymbol{y}(t)\| \to +\infty$, 所以 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ 是不稳定的. 证毕.

推论 1　如果 $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{f}(t, s, \boldsymbol{x})$ 都是 t 的连续 T-周期函数, 且定理 1 中的条件被满足. 那么, 系统(2)存在唯一的不稳定的 T-周期解.

证明　由定理 1 可知系统(2) 存在唯一的不稳定的概周期解 $\boldsymbol{x}(t)$, 而 $\boldsymbol{x}(t+T)$ 仍是概周期函数, 且容易验证它也是系统(2) 的解. 因此, 由概周期解的唯一性可知必有 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t+T)$, 即 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(2)唯一的不稳定的 T-周期解. 证毕.

参　考　文　献

1　彭世国, 谢湘生. 具有分布滞量的微分系统的周期解和全局吸引性[J]. 数学物理学报, 2001, 21(4): 466~471

2　王全义. 周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]. 数学年刊, 1994, 15(5): 537~545

3　曹进德, 李永昆. 具时滞的高维周期系统周期解的存在性与唯一性[J]. 数学学报, 1997, 40(2): 280~286

4　Fink A M. Almost Periodic Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1974. 125~127

The Instable Almost Periodic Solutions to a Class of Higher Dimensional Almost Periodic Systems

Fang Congna　　Wang Quanyi

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　A study is made on problem of almost periodic solutions to a class of higher dimensional almost periodic systems. By using exponential type dichotomy and method of Lyapunov functional, some new results are obtained on existence and uniqueness and instability of the almost periodic solutions this class of systems.

Keywords　almost periodic solutions, existence, uniqueness, instability