第 24 卷 第 4 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.24 No.4
2003 年 10 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct.2003

文章编号 1000-5013(2003)04-0430-05

不同借贷利率的投资组合的有效前沿

于培民 屠新曙

(天津大学管理学院, 天津 300072)

摘要 研究在不同借贷利率下, 投资组合的有效前沿. 运用一种几何方法, 给出该有效前沿的方程. 把 Markowitz 模型的有效前沿、不同借贷利率下的资本市场线(CML), 分别用投资组合的权重向量予以表示. 再由 CML 的定义, 就在 Markowitz 模型的有效前沿上, 分别求出不同借贷利率下资本市场线与 Markowitz 模型有效前沿的切点. 由此, 得到不同借贷利率下 CML 的斜率, 以及不同借贷利率下投资组合的有效前沿.

关键词 市场投资组合, 有效前沿, 资本市场线

中图分类号 O 211.67 ∶ F 272 文献标识码 A

在 20 世纪后半期, 华尔街发生两次数学革命. 它使数学规划、随机方程等数学工具和方法, 在金融实践中的应用得到很大的发展. 1952 年, Markowitz 发表的论文[1]标志了华尔街第一次数学革命的开始. 该论文提出均值-方差分析, 首次定量地分析投资组合中风险与收益之间的内在关系. 它使人们可以系统地描述和解决投资组合的最优化问题, 在投资组合理论中具有关键作用. Markowitz 模型是规范性的, 其指明了投资者应该如何去行动. 这一行动需要解决 3 个隐含的问题. (1) 证券的价格行为. (2) 投资者期望的风险-回报率关系的类型. (3) 衡量证券风险的适当方法. 1964 至 1966 年, Sharp, Lintner 和 Mossin 分别独立地发现了资本资产定价模型(CAPM). 这是个一般均衡模型, 它试图为这些问题提供较为明确的答案[2~5]. CAPM 不仅使人们提高了对市场行为的了解, 而且还提供了实践上的便利. 同时, 它也为评估风险调整中的业绩提供了一种实用的方法. 因此, CAPM 为投资组合分析的多方面的应用提供了一种原始的基础. 然而, CAPM 假定投资者可以无限制地以同样的无风险利率借入和贷出, 这在现实的市场运作中是无效的. 金融中介机构在贷出资金时的利率会比借入时高, 这样投资者的利差中包括了自身的边际利润和对信用风险的补偿增益. 因此, 借入资金需要支付比贷出或投资资金更高的利率. 所以, 在理论上和金融实践活动中, 探讨不同利率下的投资组合问题很有意义. 本文研究了不同借贷利率下, 投资组合的有效前沿. 运用我们自己创立的一种几何方法, 给出了该有效前沿的方程. 在本文中, 我们首先把 Markowitz 模型的有效前沿, 用投资组合的权重向量表示出来. 然后将不同借贷利率下的资本市场线(CML), 也用投资组合的权重向量表示出来. 再由 CML 的定义, 就在 Markowitz 模型的有效前沿上, 分别求出不同

收稿日期 2003-02-18

作者简介 于培民(1963-), 男, 讲师, 在职博士研究生, E-mail: ypm218@sina.com.cn

借贷利率下资本市场线与 Markowitz 模型有效前沿的切点. 同时, 得到不同借贷利率下 CML 的斜率. 这样, 我们就得到了不同借贷利率下投资组合的有效前沿. 我们的目标是开发一种理论, 这种理论是不同借贷利率下的投资组合理论. 同时我们还提供不同借贷利率下, 计算投资组合有效前沿的算法工具. 我们强调在算法上, 不同借贷利率下投资组合的有效前沿, 通常不能用简单的分析工具进行演算.

1　Markowitz 模型的有效前沿[6]

投资组合的构建乃选择纳入投资组合的证券, 确定其适当的权重, 即各证券所占该投资组合的比例. Markowitz 模型表明, 构建投资组合的合理目标应在给定的风险水平下, 形成一个具有最高回报率的投资组合. 或在给定的回报率水平下, 形成一个具有最小风险的投资组合. 具此特征的投资组合叫做有效的投资组合, 它们位于下列模型(I) 的解集合中. 该模型为

$$\min \sigma_p^2 = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \Sigma \boldsymbol{X}, \qquad \max E(r_p) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}, \qquad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

其中 $\boldsymbol{R} = [R_1, R_2, \cdots, R_n]^{\mathrm{T}}$, $R_i = E(r_1)$ 是第 i 种资产的预期回报率, $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 是投资组合权重向量, $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{n\times n}$ 是 n 种资产间的协方差矩阵, $R_p = E(r_p)$ 和 $\sigma_p^2 = \mathrm{var}(r_p)$ 分别是投资组合的期望回报率和回报率的方差. σ_p 称为回报率的标准差, 表示投资组合的回报率 r_p 偏离 $E(r_p)$ 的幅度, 被 Markowitz 模型用于度量投资组合的风险. 模型(I) 的解集合在 σ_p-R_p 空间中是图 1 中的抛物线 AB, 被称为投资组合的有效前沿. 由文[6]可知, 这个有效前沿可由 $n-2$ 个方程构成的线性方程组表示为

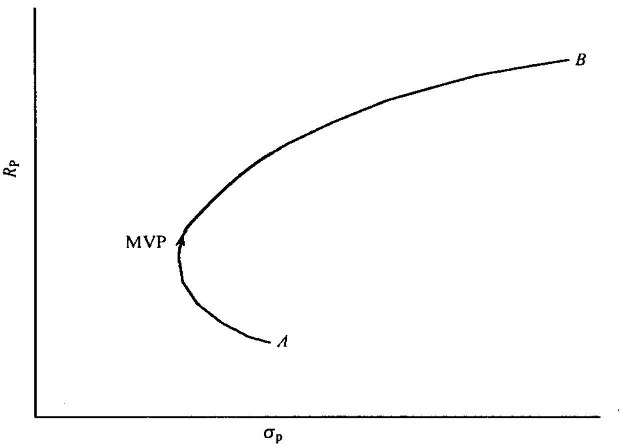

图 1　有效前沿

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{-2,1}x_1 + a_{n-2,2}x_2 + \cdots + a_{n-2,n-1}x_{n-1} &= b_{n-2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在式(1) 中, $a_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij} + \sigma_{m} - \sigma_{in} - \sigma_{jn}}{R_i - R_n} - \dfrac{\sigma_{j,n-1} + \sigma_{nn} - \sigma_{jn} - \sigma_{n-1,n}}{R_{n-1} - R_n}$, $b_i = -\dfrac{\sigma_{in} - \sigma_{nn}}{R_i - R_n} + \dfrac{\sigma_{n-1,n} - \sigma_{nn}}{R_{n-1} - R_n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-2,\ j = 1, 2, \cdots, n-1)$.

2　不同借贷利率下的 CML[6]

在 CAPM 的世界里, 决定有效组合的风险与收益关系是一件简单的事情. 图 2 以图形的方式生动地描述了它. r_f 代表无风险利率, 有效组合落在从 r_f 出发与原 Markowitz 模型有效前沿相切的直线上. 这条直线就是 CML, 它具有方程为

$$R_p = r_f + \frac{R_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_p, \tag{2}$$

其中 R_M 和 σ_M 分别代表切点 M 的期望回报率与标准差. 我们将式(2)改写为

$$R_p = r_f + k\sigma_p. \tag{3}$$

下面讨论不同借贷利率下的CML. 假设投资者的借入利率为 r_{f1}, 贷出利率为 r_{f2}. 有

$$r_{f1} > r_{f2},$$

则不同借贷利率下的, CML 分别是图3中的CML1和CML2. 它们的方程分别为

$$R_p = r_{f1} + k_1\sigma_p, \tag{4}$$

$$R_p = r_{f2} + k_2\sigma_p. \tag{5}$$

拟求不同借贷利率下的CML, 只需求出它们的斜率 k_1 和 k_2. 将式(4)转化为

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{k_1^2}(R_p^2 - 2R_p r_{f1} + r_{f1}^2). \tag{6}$$

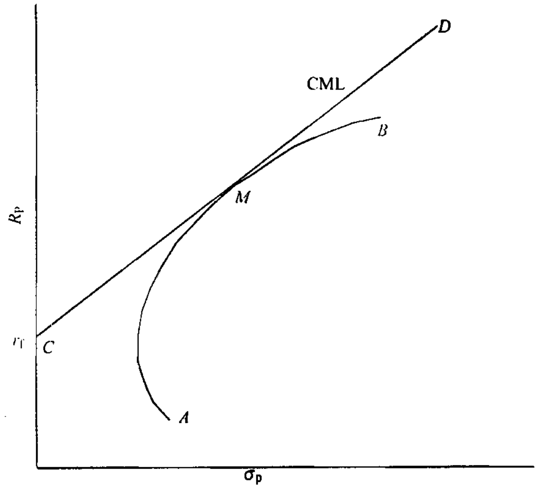

图2 有效组合的风险与收益关系

将模型(Ⅰ)中的 $R_p = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}$ 和 $\sigma_p^2 = \boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X}$ 代入式(6), 因此可以得到

$$\boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X} = \frac{1}{k_1^2}[r_{f1}^2 - 2r_{f1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R} + (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R})^2]. \tag{7}$$

因为线性方程组(1)的秩是 $n-2$, 所以它的基础解系的个数是1, 即 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 都可由 x_1 表示(利用消元法可得). 由于 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, 因此 x_n 也可由 x_1 表示. 将 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 代入式(7), 就得到关于 x_1 的一元二次方程. 因为点 M_1 是切点, 所以 x_1 只有一个根. 由求根公式, 可求出 k_1 和 x_1. 由此, 自然得到 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的值, 进而得到点 M_1 处的权重. 同时, 由 k_1 的值得到CML1方程. 由下面两式

$$R_p = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}, \tag{8}$$

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{X}^T\Sigma\boldsymbol{X}. \tag{9}$$

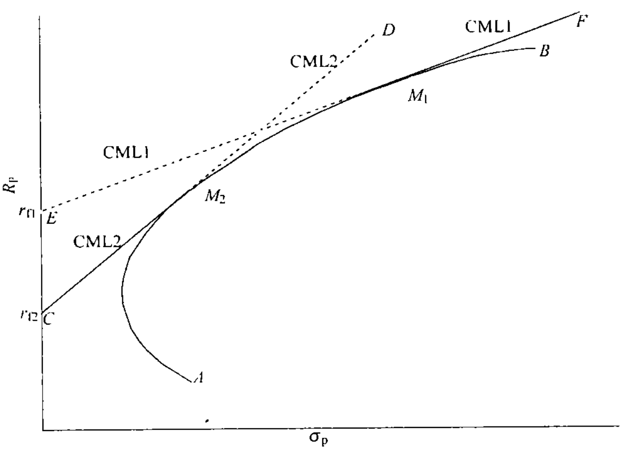

图3 不同借贷利率下的CML图

我们就分别可以确认切点 M_1 的期望回报率 M_{M1} 和方差 σ_{M1}^2. 类似地, 由方程(5)可得 k_2, CML2方程, 切点 M_2 的期望回报率 R_{M2} 和方差 σ_{M2}^2. 得到不同借贷利率下的资本市场线CML1和CML2后, 我们就能确定不同借贷利率下投资组合的有效前沿. 即图3中的实线 CM_2M_1F, 它由CML2和CML1所示两直线与一段弧线(M_2M_1)组成的折线. 这时, 投资者有3种可供投资选择的期望回报率. (1) 当投资者的期望回报率低于 R_{M2} 时, 他就贷出无风险资产和投资于风险资产. (2) 当投资者的期望回报率介于 R_{M2} 和 R_{M1} 之间时, 他就仅投资于风险资产. (3) 当投资者的期望回报率高于 R_{M1} 时, 他就借入无风险资产并投资于风险资产.

3 算例

为了说明不同借贷利率下，投资组合有效前沿的具体算法，我们将考虑美国市场上 3 种主要的资产类型. 它们分别是国际权益类、美国国内股票类和长期债券. 这 3 类证券，或被投资组合经理、大型的投资者经常使用的，或作为所考虑的资产类型的全体，或作为所考虑的资产类型的重要部分(而其它部分尚可扩充). 因此，这些资产可以看作资产配置所产生的这一类实际效果的代表，同时又能清楚地说明其应用过程. 表 1 表示这类风险资产在 1926 至 1993 年间，各自实现的年回报率、这些回报率的标准差，以及这些资产类型之间的相关性[7]. 表中 $\bar{R}_0$ 表示回报率平均值，σ_0 则表示回报率的标准差. 假设银行的存贷利率分别为 2.0% 和 3.7%，则投资者的借贷利率分别为 3.7% 和 2.0%. 由表 1 可知 $\boldsymbol{R}=[15.5\quad 12.3\quad 5.4]^{\mathrm{T}}$，并有 $\sigma_{11}=\sigma_1^2=30.3^2=918.09$，$\sigma_{22}=\sigma_2^2=20.5^2=420.25$，$\sigma_{33}=\sigma_3^2=8.7^2=75.69$，$\sigma_{12}=\sigma_{22}=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_{12}=347.844$，$\sigma_{13}=\sigma_{31}=\sigma_1=\sigma_3=\sigma_{13}=57.9942$，$\sigma_{23}=\sigma_{32}=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_{23}=24.96$. 即

表 1　1926 至 1993 年的风险回报率数据表

资产类型	$\bar{R}_0$/(%)	σ_0/(%)	相关性/(%)		
			Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
国际股票	15.5	30.3	1.0	0.56	0.22
US 股票	12.3	20.5	0.56	1.0	0.14
长期债券	5.4	8.7	0.22	0.14	1.0

$$\Sigma=\begin{bmatrix}918.090 & 347.844 & 57.9942\\ 347.844 & 420.250 & 24.9690\\ 57.9942 & 24.9690 & 75.6900\end{bmatrix}.$$

所以，方程组(1)可变为

$$37.552x_1-30.918x_2=-5.5988, \tag{10}$$

因而 $x_2=0.1811-1.2146x_1$，$x_3=1-x_1-x_2=0.8189+0.2146x_1$. 由于 $r_{f1}=3.7\%$，因此方程(6)变为

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\Sigma\boldsymbol{X}\,\frac{1}{k_1^2}[r_{f1}^2-2r_{f1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R})^2]=\frac{1}{k_1^2}[13.69-7.4\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R})^2]. \tag{11}$$

将 $\boldsymbol{R}$，Σ 和 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[x_1,\ 01.811-1.2146x_1,\ 0.8189+0.2146x_1]^{\mathrm{T}}$ 代入式(11)，就得到关于 x_1 的一元二次方程为

$$(2.9556-627.4309k_1^2)x_1^2+(10.1419-14.9675k_1^2)x_1+8.7002-71.9465k_1^2=0 \tag{12}$$

由求根公式，要使 x_1 只有一个根，就必须满足 $\Delta=b^2-4ac=0$，即

$$(10.1419-14.9675k_1^2)^2-4(2.9556-627.4309k_1^2)(8.7002-71.9465k_1^2)=0. \tag{13}$$

解之，得 $k_1^2=0.1241$ 或 $k_1=0.3523$. 同时，可得

$$x_1=\frac{-b}{2a}=-\frac{10.1419-14.9675\times 0.1241}{2(2.9556-627.4309\times 0.1241)}=\frac{-8.2844}{-149.8171}=0.0553.$$

将 x_1 代入到 x_2 和 x_3 中，可得到 $x_2=0.1811-1.2146x_1=0.1139$，$x_3=1-x_1-x_2=0.8189+0.2146x_1=0.8308$. 因此，我们也可以得到切点 M_1 的投资权重 $\boldsymbol{X}_1=[0.0553\quad 0.1139\quad 0.8308]^{\mathrm{T}}$. 由公式(8)，(9)可以得到切点 M_1 的期望回报率和方差，分别是 $\bar{R}_{M1}=6.74\%$，$\sigma_{M1}^2=$

74.939 3. 所以, 切点 M_1 的回报率标准差为 $\sigma_{M1}=8.66\%$.

此时, 投资者借入利率下的资本市场线(CML1)为 $R_p=r_{f1}+k_1\sigma_p=3.7+0.352\ 3\sigma_p$. 同理, 由 $r_{f2}=2.0\%$, 可得 $k_2=0.5504$ 及切点 M_2 的投资权重 $X_2=[0.030\ 6\quad 0.143\ 9\quad 0.825\ 5]^T$. 由式(8), (9)得到切点 M_2 的期望回报率和方差, 分别是 $R_{M2}=6.702\%$, $\sigma_{M2}^2=73.066\ 1$. 所以, 切点 M_2 的回报率标准差为 $\sigma_{M2}=8.548\%$. 此时, 投资者贷出利率下的资本市场线(CML2)为 $R_p=r_{f2}+k_2\sigma_p=2.0+0.550\ 4\sigma_p$

4 结束语

本文开发了一种方法, 可以解决不同借贷利率下投资组合的有效前沿问题. 同时, 给出了求不同借贷利率下资本市场线(CML)的一种方法. 这对投资组合理论的发展及其在实践中的具体应用, 都具有重大意义.

参 考 文 献

1 Harry M. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(3): 77～91

2 William S. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk[J]. Journal of Finance, 1964, 19(3): 425～442

3 John L. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets[J]. Review of Economics and Statistics, 1965, 47(1): 13～37

4 John L. Security prices, risk and maximal gains from diversification[J]. Journal of Finance, 1965, 20(4): 587～615

5 Jan M. Equilibrium in a capital asset market[J]. Econometrica, 1966, 34(4): 768～783

6 屠新曙, 王 键. 求解投资组合最优权重的几何方法[J]. 中国管理科学, 2000, 8(3): 20～25

Efficient Frontier of Portfolio under Different Loan Interest Rates

Yu Peimin Tu Xinshu

(College of Manag., Tianjin Univ., 300072, Tianjin, China)

Abstract Efficient frontier of portfolio is studied under different loan interest rates and equation for this efficient frontier is given by using a geometric method. The details are described in 3 steps. Firstly, efficient frontier of Markowitz model is expressed by using weight vector of porlfolio, secondly, capital marketing lines (CML) under different loan interest rates are also expressed by using weight vector of portfolio. And finally, tangential points of CML under different loan interest rates with efficient frontier of Markowitz are solved respectively, which are just solved on the efficient frontier of Markowitz model by the definition of CML; and moreover, the slopes of CML under different loan interest rates are also obtained. So the efficient frontier of portfolio under different loan interest rates is obtained.

Keywords market portfolio, efficient frontier, capital marketing line