第 24 卷　第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 4
2003 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 2003

文章编号　1000-5013(2003)04-0354-04

一类拟圆盘的一些几何特征

陈　行　堤

(华侨大学应用数学系, 福建 泉州 362011)

摘要　研究一类拟圆盘的几何特征. 相应于 Chuaqui 和 Osgood 的结果, 文中对一类拟圆盘 Poincaré 尺度的对数梯度进行上、下界估计, 进一步完善其结果.

关键词　拟圆盘, Poincaré 尺度, Schwarz 导数

中图分类号　O 174.51　　　文献标识码　A

1　问题的提出

Osgood[1] 证明了如果 $\Omega\subset \mathbf{C}$ 是一单连通区域, 记 $\lambda_\Omega(z)$ 为 Ω 上的 Poincaré 尺度, $d(z, \partial\Omega)$ 为 z 到 $\partial\Omega$ 的欧氏距离. 则对所有的 $z\in\Omega$, 有

$$\left|\nabla \log\lambda_\Omega(z)\right| \leq 4\lambda_\Omega(z) \tag{1}$$

和

$$\left|\nabla \log\lambda_\Omega(z)\right| \leq \frac{4}{3d(z, \partial\Omega)} \tag{2}$$

成立, 其中

$$\left|\nabla \log\lambda_\Omega(z)\right| = 2\left|(\log\lambda_\Omega)_z\right|$$

为 $\lambda_\Omega(z)$ 关于 z 的对数梯度[1]. 这两个不等式的系数是可达的.

Huang 和 Owa[2] 把式(1), (2) 联合考虑, 作出一致性的精确估计. 即对任意的单连通区域 $\Omega\subset \mathbf{C}$, 有

$$\left|\nabla \log\lambda_\Omega(z)\right| \leq \frac{4}{d(z, \partial\Omega)}\Big(4\sqrt{d(z, \partial\Omega)\lambda_\Omega(z)} - 3d(z, \partial\Omega)\lambda_\Omega(z) - 1\Big), \qquad z\in\Omega \tag{3}$$

成立. 如果 $\mathbf{C}$ 不是单连通区域, 而是一般的区域, Osgood[1] 证明了对任何 $z\in\Omega$, 有

$$\left|\nabla \log\lambda_\Omega(z)\right| \leq \frac{2}{d(z, \partial G)}.$$

系数 2 是不是最佳的, 我们并不知道. 但是, Huang 和 Owa 在文[2] 中证明了系数应不少于

收稿日期　2003-02-17

作者简介　陈行堤(1976-), 男, 助教, E-mail: cxtt@netease.com

基金项目　华侨大学科研基金资助项目(02HZR12)

1. 425…

本文研究一类拟圆盘的情形, 结合 Chuaqui 和 Osgood [3] 的结果, 得到该类区域上的 Poincaré 尺度的对数梯度的上、下界估计.

2　预备知识及相关定理

设 Ω 是复平面 **C** 上的一个双曲型区域, f 是单位圆盘 $\Delta=\{z\,|\,|z|<1\}$ 到 Ω 上的映照. 如果 $f(z)$ 在 Δ 内亚纯, 定义 Schwarz 导数为

$$S_f(z)=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

它在 Δ 内是解析的, 当且仅当 $f(z)$ 在 Δ 内局部单叶. Schwarz 导数在 Möbius 变换下保持不变. 对某个 $0\leq t<1$, 用 N^t 记所有满足

$$|S_f(z)|\leq\frac{2t}{(1-|z|^2)^2},\qquad z\in\Delta \tag{4}$$

的单叶解析函数所成的类. 我们知道, 这类函数都可以拟共形延拓到全平面 [3]. 因此, 这类单叶解析函数的像区域 $f(\Delta)$ 都是拟圆盘. 另外, 万有 Teichmüller 空间 $T(1)$ 可以看成拟圆盘的集合. 通过 Bers 嵌入定理, 也可以看成是 Schwarz 导数的集合. 自然, 研究该族拟圆盘的几何特征引起不少学者的关注. 我们还需要以下一些定义.

定义　如果 f 是 Δ 到 Ω 上的一个共形映照, 那么可定义区域 Ω 的 Poincaré 尺度为

$$\lambda_\Omega(f(z))|f'(z)|=\lambda_\Delta(z)=\frac{1}{1-|z|^2},\qquad z\in\Delta. \tag{5}$$

由于这个定义与共形映照的选择无关, 因此对任意的 $w\in\Omega$, 可选择一个共形映照满足 $f(0)=w$. 所以, $\lambda_\Omega(w)=1/|f'(0)|$.

根据上式和式(5), 如果 g 是区域 $F\subset$ **C** 到区域 Ω 的共形映照, 可得

$$\lambda_\Omega(g(z))|g'(z)|=\lambda_F(z),\qquad z\in F.$$

对上式两边同时取对数, 有

$$\log\lambda_\Omega\circ g+\log|g'|=\log\lambda_F. \tag{6}$$

对式(6)的两边关于 z 微分, 可得

$$((\log\lambda_\Omega)_w\circ g)g'+\frac{g''}{2g'}=(\log\lambda_F)_z. \tag{7}$$

记 $N_0^t=\{f\,|\,f\in N^t, f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0\}$, Chuaqui 和 Osgood 在文 [3] 中证明了以下两个定理.

定理 **A**　如果 $f\in N_0^t$, 则

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leq\frac{2t|z|}{1-|z|^2}. \tag{8}$$

定理 **B**　记 $\Omega=\{w\,|\,w=f(z), f\in N_0^t,\ z\in\Delta\}$, $\lambda_\Omega(w)$ 是 Ω 上的 Poincaré 尺度, 则

$$2(1-t)^{3/2}|w|\lambda_\Omega(w)\leq|\nabla\log\lambda_\Omega(w)|. \tag{9}$$

定理 B 的结论说明, Ω 上的对数梯度有一个下界的界限, 结合式(3)的结果, 应该会有相应的上界界限. 本文针对这个问题进行研究, 进一步完善定理 B 的结果.

3 主要结果及其证明

我们将证明如下定理.

定理 记 $\Omega=\{w\,|\,w=f(z),\ f\in N_0^t,\ z\in\Delta\}$，$\lambda_\Omega(w)$ 是 Ω 上的 Poincaré 尺度, 则

$$2(1-t)^{3/2}|w|\lambda_\Omega(w)\le|\nabla\log\lambda_\Omega(w)|\le 2(1+t)^{3/2}|w|\lambda_\Omega(w),\qquad w\in\Omega \tag{10}$$

证明 设 $f\in N_0^t$, 记 $\Omega=\{w\,|\,w=f(z),\ z\in\Delta\}$，$\lambda_\Omega(w)$ 是 Ω 上的 Poincaré 尺度. 由于

$$|\nabla\log\lambda_\Omega(w)|=2\frac{|(\partial_w\lambda_\Omega)(w)|}{\lambda_\Omega(w)}=2\frac{\left|\bar z-\frac{1}{2}(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|}{(1-|z|^2)|f'(z)|},$$

根据定理A, 有

$$|\nabla\log\lambda_\Omega(w)|\le 2\lambda_\Omega(w)\left(|\bar z|+\frac{1}{2}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\right)\le$$
$$2(1+t)|\bar z|\lambda_\Omega(w). \tag{11}$$

记 $\beta=\sqrt{1+t}$, $w=f(z)$, 则当 $\beta|w|\ge1$ 时, 式(10)的右边不等式自然成立. 在当 $0\le\beta|w|<1$ 的情形下, 我们需要以下引理.

引理[4] 如果 $f\in N_0^t$, 则

$$A(|z|,-t)\le|f(z)|\le A(|z|,t), \tag{12}$$

其中

$$A(z,t)=\frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{(1+z)^{\sqrt{1-t}}-(1-z)^{\sqrt{1-t}}}{(1+z)^{\sqrt{1-t}}+(1-z)^{\sqrt{1-t}}},$$

$$A(z,-t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\frac{(1+z)^{\sqrt{1+t}}-(1-z)^{\sqrt{1+t}}}{(1+z)^{\sqrt{1+t}}+(1-z)^{\sqrt{1+t}}}.$$

由式(12)的左边不等式, 有

$$\frac{1}{\beta}\frac{(1+|z|)^\beta-(1-|z|)^\beta}{(1+|z|)^\beta+(1-|z|)^\beta}\le|w|,$$

也就有

$$(1+|z|)^\beta-(1-|z|)^\beta\le\beta|w|[(1+|z|)^\beta+(1-|z|)^\beta]$$

成立. 即有

$$(1+|z|)^\beta(1-\beta|w|)\le(1+\beta|w|)(1-|z|)^\beta$$

成立. 当 $0\le\beta|w|<1$ 时, 上式等价于

$$\frac{1+|z|}{1-|z|}\le\left(\frac{1+\beta|w|}{1-\beta|w|}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

经整理可得

$$|z|\le\frac{(1+\beta|w|)^{\frac{1}{\beta}}-(1-\beta|w|)^{\frac{1}{\beta}}}{(1+\beta|w|)^{\frac{1}{\beta}}+(1-\beta|w|)^{\frac{1}{\beta}}}. \tag{13}$$

因此根据式(13), 当 $0\le\beta|w|<1$ 时, 式(11)可化为

$$|\nabla\log\lambda_\Omega(w)|\le 2(1+t)\frac{(1+\beta|w|)^{1/\beta}-(1-\beta|w|)^{1/\beta}}{(1+\beta|w|)^{1/\beta}+(1-\beta|w|)^{1/\beta}}\lambda_\Omega(w). \tag{14}$$

我们可以证明 $\beta|w|$ 满足下列不等式

$$\frac{(1+\beta|w|)^{1/\beta}-(1-\beta|w|)^{1/\beta}}{(1+\beta|w|)^{1/\beta}+(1-\beta|w|)^{1/\beta}}\leq\beta|w|. \tag{15}$$

这是由于, 要证明式(15)成立, 只要证明下式

$$(1+\beta|w|)^{1/\beta}-(1-\beta|w|)^{1/\beta}\leq\beta|w|((1+\beta|w|)^{1/\beta}+(1-\beta|w|)^{1/\beta}).$$

这即等价于证明

$$(1-\beta|w|)(1+\beta|w|)^{1/\beta}\leq(1+\beta|w|)(1-\beta|w|)^{1/\beta}.$$

也就相当于只要证明

$$\frac{(1+\beta|w|)^{1/\beta}}{(1-\beta|w|)^{1/\beta}}\leq\frac{(1+\beta|w|)}{(1-\beta|w|)}.$$

由函数的单调性, 可知上式成立. 根据式(15), 当 $0\leq\beta|w|<1$ 时, 式(14)可进一步化为

$$|\nabla\log\lambda_\Omega(w)|\leq 2(1+t)\beta|w|\lambda_\Omega(w)=2(1+t)^{3/2}|w|\lambda_\Omega(w).$$

因此, 对任意的 $\beta|w|\geq 0$ 定理的上界估计都成立. 而定理中的下界估计可由定理 B 得到. 定理证毕.

注　定理当 t 很小时, 具有相当的精确性. 因为, 当 $t=0$ 时, 即 $S_f=0$, 则 f 只能是 Möbius 的变换, 而 f 又满足标准化条件 $f(0), f'(0)=1, f''(0)=0$, 所以 $f\equiv z$. 因此, 有 $|\log\lambda_\Omega(w)|=2\lambda_\Omega(w)|w|$, 即式(10)的等号成立.

参　考　文　献

1 Osgood B G. Some properties of f''/f' and the Poincaré metric[J]. Indiana Univ. Math. J., 1982, 31: 449～461

2 Huang Xinzhong, Shigeyoshi Owa. On the logarithmic gradient of Poincaré metric[J]. Proc. Japan Acad., 1994, 70(7): 235～238

3 Chuaqui M, Osgood B G. Ahlfors-Weill extension of conformal mappings and critical points of the Poincaré metric[J]. Comment. Math. Helv., 1994, 69: 659～668

4 Chuaqui M, Osgood B G. Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative[J]. J. Math. Soc., 1993, 48(2): 289～298

Some Geometric Features of a Class of Quasidisk

Chen Xingdi

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　For studying geometric features of a class of quasidisk, the upper and lower bounds of the logarithmic gradient of their Poincaré metric are estimated. The present work corresponds with the results from Chuaqui and Osgood in 1994 and further perfects their results.

Keywords　quasidisk, Poincaré metric, Schwarzian derivative