第 24 卷　第 4 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 24　No. 4
2003 年 10 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Oct. 2003

文章编号　1000-5013(2003)04-0349-05

一类中立型泛函微分方程的概周期解

王　全　义

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要　研究一类具有无穷时滞的中立型泛函微分方程,及其概周期解的存在性及唯一性等问题. 利用不动点方法及指数型二分性, 得到一些关于该方程的概周期解的存在性及唯一性的新结果.

关键词　中立型泛函微分方程, 概周期解, 存在性, 唯一性

中图分类号　O 175.6　　文献标识码　A

文 [1, 2] 研究了具有无穷时滞的中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{x}(t) - \int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{B}(t,s)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s\right) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{C}(t,s)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

的概周期解的存在性和唯一性等问题. 本文将研究更广泛的一类中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{x}(t) - \int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{B}(t,s)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s\right) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{C}(t,s)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t)) \tag{2}$$

的概周期解的存在性及唯一性等问题. 方程中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $t\in\mathbf{R}$; $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $n\times n$ 连续函数矩阵, $\boldsymbol{C}(t,s)=[c_{ij}(t,s)]_{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(t,s)=[b_{ij}(t,s)]_{n\times n}$ 都是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的 $n\times n$ 连续函数矩阵, $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的连续函数. 利用不动点方法及指数型二分性, 得到了该方程存在唯一的概周期解, 及其模的包含性的一些新结果. 所得结果推广了文 [3] 中的有关结果.

1　主要结果

对于方程(2), 假设下述条件.

(1) $\boldsymbol{A}(t)$ 是 t 的概周期函数矩阵. $\boldsymbol{B}_1(t,s)\triangleq\boldsymbol{B}(t,t+s)$, $\boldsymbol{C}_1(t,s)\triangleq\boldsymbol{C}(t,t+s)$ 关于 t 对 $s\in D_1$ (D_1 为 $\mathbf{R}$ 中的任一紧子集) 是一致概周期函数矩阵. $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$ 关于 t 对 $\boldsymbol{x}\in D_2$ (D_2 为 $\mathbf{R}^n$ 中的任一紧子集) 是一致概周期函数向量.

(2) 概周期函数 $a(t)$ 的平均值

$$M[a]\triangleq\lim_{t-s\to+\infty}\frac{1}{t-s}\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = b > 0, \tag{3}$$

其中

收稿日期　2003-04-25

作者简介　王全义(1955-), 男, 教授, E-mail: gywang@hqu.edu.cn

基金项目　国务院侨务办公室重点科研基金资助项目(01QZR02)

$$a(t)=\min_{1\le j\le n}\{a_{jj}(t)-\sum_{i=1,i\ne j}^{n}a_{ij}(t)\}.$$

(3) 存在着常数 K_1 满足 $0\le K_1<1$, 使得对 $t\in\mathbf{R}$ 有 $\int_{-\infty}\|\boldsymbol{B}(t,s)\|\mathrm{d}s\le K_1$ 且 $\int_{-\infty}\|\boldsymbol{C}(t,s)\|\mathrm{d}s$ 有界.

(4) 对 $\forall\epsilon>0$, 存在 $L=L(\epsilon)>0$ 使得对 $\forall t\in\mathbf{R}$, 都有

$$\int_{-\infty}^{L}\|\boldsymbol{B}(t,s)\|\mathrm{d}s<\epsilon,\qquad\int_{-\infty}^{L}\|\boldsymbol{C}(t,s)\|\mathrm{d}s<\epsilon.$$

(5) 存在着非负的概周期函数 $a_1(t)$ 使得对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 都有

$$\|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})\|\le a_1(t)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.\tag{4}$$

(6) 存在着正常数 $K>\frac{1+K_1}{1-K_1}$, 使得对 $\forall t\in\mathbf{R}$, 有

$$a(t)-K\left[\int_{-\infty}\|\boldsymbol{A}_0(t,s)\|\mathrm{d}s+a_1(t)\right]\ge 0.$$

在上式中, $a(t)$, $a_1(t)$ 分别由条件(2), (5)中给出, 且 $\boldsymbol{A}_0(t,s)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t,s)+\boldsymbol{C}(t,s)$. 记 $\boldsymbol{BC}(-\infty,t_0]=\{\varphi(t)\ \varphi:(-\infty,t_0]\to\mathbf{R}^n$ 有界连续$\}$, 且对 $\forall\varphi\in\boldsymbol{BC}(-\infty,t_0]$, 定义它的范数为 $\|\varphi\|=\sup\{\|\varphi(t)\|:t\in(-\infty,t_0]\}$. 方程(2)的具有有界连续初始函数 $\varphi\in\boldsymbol{BC}(-\infty,t_0]$, 其解将表示为 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)$ 或 $\boldsymbol{x}(t,\varphi)$ 或 $\boldsymbol{x}(t)$ (如果不会出现混淆的话). 对于方程(2), 我们有

定理 1 如果上述条件(1)～(6)都被满足, 则方程(2)存在唯一的概周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$, 且 $\mathrm{mod}(\varphi)\subset\mathrm{mod}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{g})$.

推论 1 在定理 1 的条件下, 如果对 $\forall t,s\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 都有 $\boldsymbol{A}(t+T)=\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{g}(t+T,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{C}(t+T,s+T)=\boldsymbol{C}(t,s)$, $\boldsymbol{B}(t+T,s+T)=\boldsymbol{B}(t,s)$. 这里 $T>0$ 为常数. 则方程(2)存在着唯一的 T-周期解.

注 1 显然文[3]中定理 1 是本文推论 1 的特殊情况.

2 一些引理

本节先给出一些有用的引理. 考虑如下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\tag{5}$$

其中 $t\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 连续函数矩阵.

下列引理 1 是文[3]中的引理 1, 引理 2 是文[2]中的引理 2.

引理 1[3] 设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是方程(5)的一个基本解矩阵, 则有

$$\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\|\le\exp\left(-\int a(r)\mathrm{d}r\right),\qquad s\ge t,\tag{6}$$

其中

$$a(t)=\min_{1\le j\le n}\{a_{jj}(t)-\sum_{i=1,i\ne j}^{n}a_{ij}(t)\}.$$

引理 2[2] 设 $n\times n$ 连续函数矩阵 $\boldsymbol{C}(t,s)$ 满足条件(1), (3), (4), 且 $\boldsymbol{f}_1(t)$ 是 n 维概周期函数向量, 则

$$\boldsymbol{f}_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}(t,s)\boldsymbol{f}_1(s)\,\mathrm{d}s \tag{7}$$

也是概周期函数.

引理 **3**　设 $a(t)$ 是概周期函数，且它的平均值为

$$M[a] = b > 0,$$

则存在正常数 α, β 使得

$$\exp\left(-\int_t^s a(r)\,\mathrm{d}r\right) \leq \beta\exp(-\alpha(s-t)), \qquad s \geq t. \tag{8}$$

证明　由于 $-a(t)$ 也是概周期函数, 且有

$$M[-a] = -b < 0,$$

故由文 [4] 中的引理 2.5 即得此引理的结论．引理 3 证毕.

考虑如下的概周期微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{9}$$

其中 $t\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}(t)$ 为 $n\times n$ 概周期函数矩阵, $\boldsymbol{f}(t)$ 为 n 维概周期函数向量.

引理 **4**　如果 $\boldsymbol{A}(t)$ 满足条件(2)，则方程(9) 存在唯一的概周期解 $\boldsymbol{x}(t)$. 它可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = -\int_t^{\infty} \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{X}(t)$ 为方程(5) 的一个基本解方阵.

证明　因为 $\boldsymbol{A}(t)$ 满足条件(2)，因此由引理 1, 3 可知方程(5) 具有指数型二分性．又由文 [5] 中的定理 7.7 可知此引理的结论成立．引理 4 证毕.

引理 **5**　设 $\boldsymbol{C}(t,s)$，$\boldsymbol{f}_1(t)$ 满足引理 2 的条件．于是, 由引理 2 可知

$$\boldsymbol{f}_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}(t,s)\boldsymbol{f}_1(s)\,\mathrm{d}s$$

是概周期函数．又设 $\{t_n\}\subset\mathbf{R}$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\boldsymbol{C}_1(t+t_n,s) = \boldsymbol{C}(t+t_n, t+t_n+s) \to \boldsymbol{C}_1(t,s) = \boldsymbol{C}(t,t+s).$$

在 $\mathbf{R}\times D_1$(D_1 为 $\mathbf{R}$ 中的任意给定的紧子集) 上一致地成立，且

$$\boldsymbol{f}_1(t+t_n) \to \boldsymbol{h}_1(t)$$

在 $\mathbf{R}$ 上一致地成立. 那么当 $n\to\infty$ 时, 即

$$\boldsymbol{f}_2(t+t_n) \to \boldsymbol{h}_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{C}(t,s)\boldsymbol{h}_1(s)\,\mathrm{d}s$$

在 $\mathbf{R}$ 上一致地成立．因篇幅限制, 此引理证略.

3　定理的证明

(Ⅰ) 定理 1 的证明.

记 $D=\{\boldsymbol{V}(t) \mid \boldsymbol{V}: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 为概周期函数$\}$, 则 D 在范数

$$\|\boldsymbol{V}\| = \sup\{\|\boldsymbol{V}(t)\| \mid t\in\mathbf{R}\}$$

下是一个 Banach 空间．又令 $\boldsymbol{A}_0(t,s) = \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t,s) + \boldsymbol{C}(t,s)$. 于是由定理的条件(1), (3), (4) 容易推得 $\boldsymbol{A}_0(t,s)$ 具有 $\boldsymbol{C}(t,s)$ 的相同性质．从而对任意的 $V\in D$，由引理 2 可知 $\int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{A}_0(t,$

$s)\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s$ 及 $\int_{-\infty}\boldsymbol{B}(t,s)\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s$ 都是概周期函数. 因为 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$ 关于 t 对 $\boldsymbol{x}\in D_1$(D_1 为 $\mathbf{R}^n$ 中的任一紧子集) 是一致概周期的, 所以对任意的 $\boldsymbol{V}\in D$, $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{V}(t))$ 是 t 的概周期函数. 从而函数 $\int_{-\infty}\boldsymbol{A}_0(t,s)\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{V}(t))$ 是 t 的概周期函数.

对任意的 $\boldsymbol{V}\in D$, 现在考虑如下的概周期微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}+\left[\int_{-\infty}\boldsymbol{A}_0(t,s)\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{V}(t))\right]. \tag{11}$$

由定理的条件及引理 4 可知, 方程(11) 存在唯一的概周期解 $\boldsymbol{y}_v(t)$, 它可表示为

$$\boldsymbol{y}_v(t)=-\int^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\left[\int_{-\infty}\boldsymbol{A}_0(r,s)\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{g}(r,\boldsymbol{V}(r))\right]\mathrm{d}r, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{X}(t)$ 为方程(5) 的一个基本解方阵.

对 $\forall\,\boldsymbol{V}\in D$, 记

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_v(t)&=\int_{-\infty}\boldsymbol{B}(t,s)\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{y}_v(t)\\&=\int_{-\infty}\boldsymbol{B}(t,s)\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s-\int^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\Big[\int_{-\infty}\boldsymbol{A}_0(r,s)\\&\quad\boldsymbol{V}(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{g}(r,\boldsymbol{V}(r))\Big]\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{13}$$

则由上述证明可知 $\boldsymbol{x}_v(t)$ 也是概周期函数.

现在作映射 $G:D\to D$ 为

$$G\boldsymbol{V}(t)=\boldsymbol{x}_v(t),\qquad\forall\,\boldsymbol{V}\in D. \tag{14}$$

下面证明 $G:D\to D$ 是一个压缩映射. 事实上, 对 $\forall\,\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\in D$, 由定理的条件及引理 1, 可得

$$\begin{aligned}&\|G\boldsymbol{V}_1(t)-G\boldsymbol{V}_2(t)\|\le\int_{-\infty}\|\boldsymbol{B}(t,s)\|\;\|\boldsymbol{V}_1(s)-\boldsymbol{V}_2(s)\|\,\mathrm{d}s+\\&\int^{\infty}\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\|\;\Big[\int_{-\infty}\|\boldsymbol{A}_0(r,s)\|\;\|\boldsymbol{V}_1(s)-\boldsymbol{V}_2(s)\|\,\mathrm{d}s+\\&\|\boldsymbol{g}(r,\boldsymbol{V}_1(r))-\boldsymbol{g}(r,\boldsymbol{V}_2(r))\|\Big]\mathrm{d}r\le\\&\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|\int_{-\infty}\|\boldsymbol{B}(t,s)\|\,\mathrm{d}s+\int^{\infty}\exp\Big(-\int a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\\&\Big[\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|\int_{-\infty}\|\boldsymbol{A}_0(r,s)\|\,\mathrm{d}s+a_1(r)\|\boldsymbol{V}_1(r)-\boldsymbol{V}_2(r)\|\Big]\mathrm{d}r\le\\&K_1\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|+\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|\int^{\infty}\exp\Big(-\int a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\Big[\int_{-\infty}\|\boldsymbol{A}_0(r,s)\|\,\mathrm{d}s+a_1(r)\Big]\mathrm{d}r\le\\&K_1\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|+\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|\int^{\infty}\exp\Big(-\int_t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\left(\frac{a(r)}{K}\right)\mathrm{d}r\le\\&K_1\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|+\frac{1}{K}\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|=\Big(K_1+\frac{1}{K}\Big)\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|.\end{aligned} \tag{15}$$

从而对 $\forall\,\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\in D$, 有

$$\|G\boldsymbol{V}_1-G\boldsymbol{V}_2\|\le\Big(K_1+\frac{1}{K}\Big)\|\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\|. \tag{16}$$

由于 $K>\frac{1+K_1}{1-K_1}$, 且 $0\le K_1<1$, 故有 $K_1+\frac{1}{K}<1$. 因此, 映射 $G:D\to D$ 是压缩映射. 从而 G 在

D 中存在唯一的不动点, 即存在唯一的一点 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)\in D$, 使得

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{B}(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s-\int_{t}^{+\infty}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\Big[\int_{-\infty}^{r}\boldsymbol{A}_0(r,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{g}(r,\varphi(r))\Big)\Big]\,\mathrm{d}r. \tag{17}$$

移项即得

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{B}(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=-\int_{t}^{+\infty}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(r)\Big[\int_{-\infty}^{r}\boldsymbol{A}_0(r,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{g}(r,\varphi(r))\Big)\Big]\,\mathrm{d}r. \tag{18}$$

从式(18)的右边可知, $\varphi(t)-\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{B}(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s$ 是连续可微的, 并且直接从式(18)的两边对 t 求导即知 $\varphi(t)$ 满足方程(2). $\varphi(t)$ 是方程(2)的唯一概周期解.

最后, 由定理的条件和引理 2, 4, 5 及定理 4, 5[5] 可以证明 $\mathrm{mod}\,\varphi\subset\mathrm{mod}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{g})$ [因篇幅限制, 证明从略]. 定理 1 证毕.

(Ⅱ) 推论 1 的证明.

由定理 1 可知方程(2)存在唯一的概周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$, 又由推论的附加条件容易验证 $\varphi(t+T)$ 也是方程(2)的解. 再由 $\varphi(t)$ 的概周期性易知 $\varphi(t+T)$ 也是概周期的. 因此由方程(2)的概周期解的唯一性即知, 对 $\forall t\in\mathbf{R}$, $\varphi(t)=\varphi(t+T)$. 从而, $\varphi(t)$ 是方程(2)的唯一的 T-周期解. 推论 1 证毕.

参　考　文　献

1 杨喜陶, 冯春华. 一类具有无穷时滞的中立型 Volterra 积分微分方程概周期解的存在唯一性[J]. 数学学报, 1997, 40(3): 395～402

2 王全义. 一类中立型泛函微分方程的概周期解的存在唯一性与稳定性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2002, 23(3): 222～228

3 王全义. 具有无限时滞的微积分方程的概周期解的存在性与唯一性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 336～340

4 王全义. 概周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]. 数学学报, 1997, 40(1): 80～89

5 Fink A M. Almost periodic differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1974. 60～61, 125～127

Almost Periodic Solution to a Class of Neutral Type Functional Differential Equations

Wang Quanyi

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract A study is made on the existence and the uniqueness of almost periodic solution to a class of neutral type functional differential equations with infinite time lay. By using fixed point method and exponential dichotomy, the author obtains some new results confirming the existence and the uniqueness of almost periodic solution to these equations

Keywords functional differential equation of neutral type, almost periodic solution, existence, uniqueness