

文章编号 1000-5013(2003)04-0345-04

## 分段拟对称作为整体拟对称函数的偏差估计

王朝祥 黄心中

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

**摘要** 进一步研究分段拟对称函数转化为整体拟对称函数的条件. 在相邻区间上关于连接点对称的偏差, 限制了整体拟对称偏差的界限. 改进了有关论述分段与整体拟对称函数之间关系所得到的结果.

**关键词** 拟对称函数, 拟共形映照, 偏差

**中图分类号** O 174.55

**文献标识码** A

我们知道<sup>[1]</sup>, 给定 Jordan 区域  $G$  到  $G$  上的  $K$ -拟共形映照  $f(z)$ , 可以导出一个  $\partial G$  到  $\partial G$  上的拓扑同胚映照. 当  $G = G = H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $f(z)$  是  $H$  到自身上的  $K$ -拟共形映照, 若满足  $f(\cdot) = \cdot$ , 则  $f|_{\partial H}$  是实轴  $\mathbf{R}$  上的  $\rho$ -拟对称函数. 即  $\rho^{-1} |f(x+t) - f(x)| / |f(x) - f(x-t)| \leq \rho$  对一切  $x \in \mathbf{R}, t > 0$  成立, 且  $\rho$  是仅与  $K$  有关的常数. 反之, 根据 Beurling-Ahlfors 定理<sup>[2]</sup>, 任何一个  $\rho$ -拟对称函数, 都可以延拓成到  $H$  自身上的  $K$ -拟共形映照. 这说明在拟共形映射理论中, 对于拟对称函数的研究是十分重要的. 若  $f(x)$  分别是  $[a, b], [b, c]$  上的  $\rho$ -拟对称函数, 文 [3] 说明了,  $f(x)$  未必能转化成  $[a, c]$  上的拟对称函数. 这表明, 研究分段拟对称与整体拟对称函数之间的关系是有意义的. 其应用情况可参阅文 [4, 5]. 本文将进一步研究分段拟对称与整体拟对称函数之间的关系, 导出一些有用的不等式, 并估计可化为整体拟对称的偏差界限, 改进原有的一些结果.

## 1 几个不等式及主要结果

对分段拟对称化为整体拟对称函数的研究, Heinonen 和 Hinkkanen 在文 [6] 中证明了下述定理.

**定理 A** 设  $M \geq 1, f$  是  $[-1, M]$  上的实值严格增加连续函数,  $f(0) = 0$ . 设  $f$  是  $[-1, 0]$  和  $[0, M]$  上的  $K$ -拟对称函数, 且对于  $0 < t < 1$ , 有  $K^{-1} \frac{f(t)}{|f(-t)|} \leq K_1$ , 则  $f$  是  $[-1, M]$  上的  $K_2$ -拟对称函数.  $K_2$  是仅依赖于  $K$  和  $K_1$  的常数, 且  $K_2 \leq (1 + K_1)(1 + K)^3$ .

文 [6] 改进定理 A 的结果, 指出并弥补文 [6] 在证明该定理中的缺陷且得下面定理 B.

收稿日期 2003-03-07

作者简介 王朝祥 (1966-), 男, 讲师, E-mail: wchaox@yahoo.com.cn

基金项目 国务院侨务办公室重点科研基金资助项目(01QZR01)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

**定理 B** 设  $M \geq 1, f$  是  $[-1, M]$  上的实值严格增加连续函数,  $f(0) = 0$ . 设  $f$  是  $[-1, 0]$  和  $[0, M]$  上的  $K$ -拟对称函数, 且对于  $0 < t < 1$ , 有  $K^{-1} \frac{f(t)}{|f(-t)|} \leq K_1$ , 则  $f$  是  $[-1, M]$  上的  $K_2$ -拟对称函数.  $K_2$  是仅依赖于  $K$  和  $K_1$  的常数, 且  $K_2 \leq (1 + K_1)(1 + K)^2$ .

设  $f(x)$  满足定理 B 的条件, 我们先推导下列一些有用的不等式. 当  $0 < x < 2x \leq M$  时, 利用  $K^{-1} \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq K$  可得式(1)或式(2), 即

$$(1 + K^{-1})f(x) \leq f(2x) \leq (1 + K)f(x), \quad (1)$$

$$\frac{1}{K}f(2x) \leq f(x) \leq \frac{K}{1+K}f(2x). \quad (2)$$

此外, 利用  $f(x)$  的单调性, 当  $t - x > 0, x+t \leq M$  时, 可得

$$f(x+t) \leq (1+K)f\left(\frac{x+t}{2}\right) \leq (1+K)f\left(\frac{t+t}{2}\right) = (1+K)f(t),$$

以及利用式(2), 可得

$$f(x+t) - f(x) \leq f(x+t) - \frac{K}{1+K}f(2x) \leq \frac{1}{K+1}f(x+t).$$

所以

$$\frac{1}{K+1}f(x+t) \leq f(x+t) - f(x) \leq (1+K)f(t) - f(x). \quad (3)$$

如果  $t - x \leq x > 0$  且  $t \leq M$ , 则

$$f(t-x) \leq f(t) \leq (1+K)f(t-x). \quad (4)$$

如果  $x \leq t - x > 0$  且  $t \leq M$ , 则

$$f(x) \leq f(t) \leq (1+K)f(x). \quad (5)$$

根据以上不等式, 我们将证明如下定理.

**定理** 设  $M \geq 1, f$  是  $[-1, M]$  上的实值严格增加连续函数,  $f(0) = 0$ . 设  $f$  是  $[-1, 0]$  和  $[0, M]$  上的  $K$ -拟对称函数, 且对于  $0 < t < 1$ , 有  $K^{-1} \frac{f(x)}{|f(-t)|} \leq K_1$ , 则  $f$  是  $[-1, M]$  上的  $K_2$ -拟对称函数.  $K_2$  是仅依赖于  $K$  和  $K_1$  的常数, 且

$$K_2 \leq (1+K)KK_1 + K + K_1. \quad (6)$$

## 2 定理的证明

设  $f(x)$  满足上述定理条件, 要证明存在常数  $K_2(K_2 \geq 1)$ , 当  $x, t$  满足  $-1 \leq x-t < x+t \leq M$  时, 有

$$K_2^{-1} \leq F(x, t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq K_2$$

总成立. 下面分别对  $x-t, x, x+t$  所处的位置加以讨论. 当  $-1 \leq x-t < x+t \leq 0$  或  $0 \leq x-t < x+t \leq M$ , 依假设条件有  $K^{-1} \leq F(x, t) \leq K$ , 结论成立. 当  $-1 \leq x-t < 0 < x+t \leq M$  且  $x > 0$  时, 再分别就如下两种情形考虑.

(1) 如果  $-1 \leq x-t < 0 < x+t \leq M$  且  $t-x > 0$  时, 由  $\frac{1}{K} \frac{f(t+x) - f(t)}{f(t) - f(t-x)} \leq K$  可得  $\frac{f(t+x) - f(t)}{f(t) - f(t-x)} \leq K^2$

$$(1 + \frac{1}{K})f(t) - \frac{1}{K}f(t-x) \quad f(t+x) \quad (K+1)f(t) - Kf(t-x). \quad (7)$$

另外由  $K^{-1} \frac{f(t-x)}{[f(x-t)]} \leq K_1$  及式(4), (7), 又得

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \quad \frac{f(x+t) - f(0)}{f(0) - f(x-t)} = \frac{f(x+t)}{[f(x-t)]} \\ &\quad K_1 \cdot \frac{f(x+t)}{f(t-x)} \quad K_1 \cdot \frac{(K+1)f(t) - Kf(t-x)}{f(t-x)} \\ &\quad K_1 \cdot \frac{(K+1)[(K+1)f(t-x)] - Kf(t-x)}{f(t-x)} = K_1(K^2 + K + 1). \end{aligned} \quad (8)$$

另一方面, 由式(3)和  $f(x)$  的单调性, 我们有

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{(1+K)^{-1}f(x+t)}{f(x) + Kf(t-x)} \quad \frac{(1+K)^{-1}f(t)}{f(t-x) + Kf(t-x)} = \\ &= (1+K)^{-1}(1+K_1)^{-1} \frac{f(t)}{f(t-x)} \quad (1+K)^{-1}(1+K_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

(ii) 如果  $-1 \leq x-t < 0 < x+t \leq M$ , 且  $x-t-x > 0$  时, 由式(3), (5) 及  $K^{-1} \frac{f(t-x)}{[f(x-t)]} \leq K_1$ , 并利用  $f(x)$  的单调性, 得

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x)} \quad \frac{f(x+t)}{f(x)} - 1 \\ &= \frac{(K+1)f(t)}{(1+K)^{-1}f(t)} - 1 = K^2 + 2K. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{(1+K)^{-1}f(t)}{f(x) + Kf(t-x)} \quad \frac{(1+K)^{-1}f(t)}{f(x) + Kf(x)} = \\ &= (1+K)^{-1}(1+K_1)^{-1} \frac{f(t)}{f(x)} \quad (1+K)^{-1}(1+K_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

综上所述, 当  $-1 \leq x-t < 0 < x+t \leq M$  且  $x > 0$  时成立, 有

$$\frac{1}{(1+K)(1+K_1)} \quad F(x, t) \quad \max\{K_1(K^2 + K + 1), K^2 + 2K\}. \quad (12)$$

其次, 当  $-1 \leq x-t < 0 < x+t \leq M$  且  $x=0$  时, 依假设条件有  $K^{-1} \frac{f(0+t)-f(0)}{f(0)-f(0-t)} \leq K_1$ , 结论显然成立. 再者, 当  $-1 \leq x-t < 0 < x+t \leq M$ , 且  $x < 0$  时,  $-1 \leq x-t < 0 < x+t \leq 1$ . 从而,  $-1 \leq -x-t < 0 < -x+t \leq 1$ , 且  $-x > 0, t > -x$ . 令  $\varphi(x) = -f(-x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , 所以,  $\varphi(x)$  是  $[-1, 1]$  上的实值严格增加连续函数.  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi$  分别是  $[-1, 0]$  和  $[0, 1]$  上的  $K$ -拟对称函数,

且对于  $0 < t < 1, K^{-1} \frac{\varphi(t)}{[\varphi(-t)]} \leq K_1$  成立. 根据上面的结论, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+K)(1+K_1)} \quad \frac{\varphi(-x+t) - \varphi(-x)}{\varphi(-x) - \varphi(-x-t)} &= \max\{K(K+2), K_1(K^2 + K + 1)\}, \\ \frac{1}{(1+K)(1+K_1)} \quad \frac{-\varphi(-x+t) - [-\varphi(-x)]}{-\varphi(-x) - [-\varphi(-x-t)]} &= \\ \max\{K(K+2), K_1(K^2 + K + 1)\}, \\ \frac{1}{(1+K)(1+K_1)} \quad \frac{f(x-t) - f(x)}{f(x) - f(x+t)} &= \max\{K(K+2), K_1(K^2 + K + 1)\}. \end{aligned}$$

$$\min\left\{\frac{1}{K(K+2)}, \frac{1}{K_1(K^2+K+1)}\right\} \frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} \quad (1+K)(1+K_1). \quad (13)$$

综合上述各种情况, 只要  $x, t(t>0)$  满足  $-1 \leq x-t < x+t \leq M$  时, 总有

$$\min\left\{\frac{1}{(1+K_1)(1+K)}, \frac{1}{K(K+2)}, \frac{1}{K_1(K^2+K+1)}\right\} \frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} \leq \max\{(1+K)(1+K_1), K(K+2), K_1(K^2+K+1)\} \quad (14)$$

成立. 从而

$$\frac{1}{(1+K)KK_1+K+K_1} \frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} \leq (1+K)KK_1+K+K_1. \quad (15)$$

因此,  $f$  是  $[-1, M]$  上的  $K_2$ -拟对称函数.  $K_2$  是仅依赖于  $K$  和  $K_1$  的常数, 且  $K_2 \leq (1+K)KK_1+K+K_1$ . 证毕.

容易看出,  $(1+K)KK_1+K+K_1 \leq K_1(1+K)^2 < (1+K_1)(1+K)^2$ . 因此, 定理关于拟对称偏差的估计, 比定理 A 及定理 B 中所得的偏差估计小.

## 参 考 文 献

- 1 Ahlfors L V. Lectures on quasiconformal mappings[M]. New York: Van Nostrand, 1966. 63 ~ 84
- 2 Beurling A, Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings[J]. Acta Math., 1956, 96: 125 ~ 142
- 3 Heinonen J, Hinkkanen A. Quasiconformal maps between compact polyhedra are quasimetric[J]. Indiana University Math. J., 1996, 45: 997 ~ 1019
- 4 Hinkkanen A. Asymptotic extremal growth of quasimetric functions[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math., 1986, 11: 295 ~ 320
- 5 Väisälä J. Quasimöbius maps[J]. J. Analyse Math., 1984 ~ 1985, 44: 218 ~ 234
- 6 黄心中. 分段与整体拟对称函数之间的关系[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1999, 20(1): 1 ~ 5

## Estimate the Distortion for a Piecewise Quasi-Symmetric Function to be Turned into a Global One

Wang Chaoxiang      Huang Xinzong

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

**Abstract** For a piecewise quasi-symmetric function to be turned into a global quasi-symmetric function, the distortion of this function in relation to the symmetry of junction at adjacent interval plays decisive role; and restricts the bound of global quasi-symmetric distortion. In this paper, this distortion bound is further estimated; and the recent results of the authors' own are improved.

**Keywords** quasi-symmetric function, quasi-conformal mapping, distortion