第24卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.24 No.3
2003年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul.2003

文章编号 1000-5013(2003)03-0314-07

单向Hamilton最优通路的求解新方法及其算法设计

张 银 明

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362011)

摘要 Hamilton(哈密尔顿)问题包括最小Hamilton圈, 以及单向Hamilton最优通路两个基本问题, 后者属于排序问题. 同H-圈问题一样, 目前尚无一种有效求解方法. 使用元素判别值分配法求解单向H-通路问题, 仅一次调配便可获得最优的单向H-通路, 无须调整. 它具有显著的特点. 文中介绍单向H-通路求解的表上作业法及计算机程序的算法设计.

关键词 排序问题, Hamilton圈, 单向Hamilton通路, 元素判别值分配法, 算法设计

中图分类号 O 226 文献标识码 A

排序问题, 如使用一台机器加工 n 个部件 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$, 加工完 B_i 后再加工 B_j 时必须调整机器, 其调整的时间为 T_{ij}. 此时要求科学安排零件加工顺序, 使调整机器的总时间最少. 当然, 一般地说 $T_{ij}\neq T_{ji}$. 目前求解这种排序问题是引进有向图的概念. 在有向图中求出所有单向Hamilton通路, 取其中总权最小的, 就得到一个较好的排序. 显然, 要求出所有单向的H-通路是极为麻烦的工作. 因此, 《运筹学通论》中指出求最小权的Hamilton通路的问题没有一个有效算法[1]. 我们研制的元素判别值分配法[2], 可用于求解最小H-圈(在最小Hamilton圈问题的求解新方法一文中论述)和最小权的哈密儿顿通路问题. 它只需一次分配便可获最优方案, 无须调整, 因而是一种具有创新性的有效求解方法. 本文简述单向H-通路求解的表上作业法, 以及程序求解的算法设计.

1 排序问题及元素判别值分配法

1.1 排序问题

运筹学排序问题一般可叙述为有 n 个排序点 A_i. 从 A_i 到 A_j 的耗费(时间、单位运费、距离、机器调整时间及其它耗费)为 C_{ij}, 其中 $i,j=1,2,\cdots,n$. 要求耗费最小的调配方案, 可归结成线性规划问题. 假设 X_{ij} 表示 A_i 到 A_j 的调配待定变量称为元素, 则其数学模型可表示为

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}, \qquad (1)$$

收稿日期 2002-12-09

作者简介 张银明(1939-), 男, 教授, E-mail: dzx@hqu.edu.cn

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = n, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{2}$$

$$X_{ij}\begin{cases} 1, & \text{若从 } A_i \text{到 } A_j\text{(该元素得到调配或被选上)}, \\ 0, & \text{不从 } A_i \text{ 到 } A_j\text{(该元素得不到调配或未被选上)}. \end{cases} \tag{3}$$

这类问题的调配表, 可使用一般形式的调运分配表. 其中的排序问题是一般调运问题的特例, 即 $m= n$, 因而可简单地表示成表 1 的调配分配表. 对这类问题可使用元素判别值分配法求解. 该方法的基本理论已在文 [2] 中进行过介绍. 这里, 只对元素判别值的计算、总检验数的计算模型及调配原则作简要介绍.

表 1　排序问题一般调配分配表

排序点名	A_1	A_2	…	A_n	排序点数
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	1
A_n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{nn}	1
排序点数	1	1	…	1	n

1. 2　元素判别值分配法

1. 2. 1　元素判别值的数学模型　计算 X_{ij} 的元素判别值的数学模型可表示为

$$\mathrm{d}X_{ij} = \sum_{s=1}^{(m-1)(n-1)} f_s(\Delta X_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_s(C_{ij} - C_{i,j+k} + C_{i+l,j+k} - C_{i+l,j}). \tag{4}$$

在式(4) 中 $1- i \leq l \leq= m- i$ 且 $l \neq 0$, $1- j \leq k< \leq n- j$ 且 $k \neq 0$; $\Delta X_{ij} = C_{ij} - C_{i,j+k} + C_{i+l,j+k} - C_{i+l,j}$, 称为元素 X_{ij} 在此距形回路的检验数. 并有

$$f_s(\Delta X_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Delta X_{ij} < 0, \\ 0, & \text{当 } \Delta X_{ij} \geq 0 . \end{cases}$$

依据上述定义, 对一般具有 $M \times N$ 阶调运平衡表中, 含有 $M \times N$ 个元素. 每个元素以它为顶点的矩形回路共有 $(m-1)(n-1)$ 个. 因而其判别值为

$$\mathrm{d}X_{ij} \in [0, (m-1)(n-1)].$$

排序问题因不允许从 A_i 到 A_i, 故要使 C_{ii} 具有足够大的正数, 即

$$C_{ii} = r \times \max(C_{ij}), \qquad i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

在求解程序的计算元素判别值部分, 是按 $r= 2$ 计算的. 这样取值既可以使对角线上的元素具有足够大的正数, 又不会使求解中使用的矩形回路检验数总和的数值太大. 只要它们取足够大 $(r \geq 2)$, 并不影响求解的最后结果.

1. 2. 2　元素 X 的总检验数的计算模型　该模型有

$$ZX_{ij} = \sum \Delta X_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(C_{ij} - C_{i,j+k} + C_{i+l,j+k} - C_{i+l,j}). \tag{6}$$

在式(6) 中 $1- i \leq l \leq= m- i$ 且 $l \neq 0$, $1- j \leq k< \leq n- j$ 且 $k \neq 0$.

1. 2. 3　元素判别值分配法的调配原则 [3]　元素判别值分配法, 可用于求解单向哈密尔顿通路的基本调配. 下面是有关调配原则的叙述.

原则 1　判别值越大, 其分配的优先级越高.

原则 **2**　当对某元素 X_{ij} 进行分配或选上后，则将该元素置为

$$X_{ij} = 1.$$

我们可将它的对应元素置为“×”(不允许出现 $X_{ij}-X_{ji}$ 回路). 将该元素所有的 i 行及 j 列标上记号“√”.

原则 **3**　若有多个元素的判别值相同，则元素总检验数小的先分配. 如果元素总检验数也相同，则耗费小的优先，再按下标的顺序进行分配.

原则 **4**　当某行或某列已经具有标记“√”或某元素已置“×”时，那么处于该行或该列的元素，及已置为“×”的元素，不论判别值多大，皆已失去分配权.

2　单向哈密尔顿通路的求解算法

使用元素判别值分配法求解 H-通路问题的算法，为便于说明，不妨以《运筹学通论》的零件加工问题为例. 某单位要加工 6 个零件，其调整矩阵 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})_{6\times 6}$ 为

$$\begin{array}{c} \\ B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\\ B_5\\ B_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5\\ 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

这里的 $T_{ij}(i,j=1,2,\cdots,6)$ 表示加工 B_i 后，再加工 B_j 所需要的机器调整时间. 现要求最佳的加工顺序——排序，使机器调整时间最小. 书中先转换成有向图，画出有向图相应的弧. 然后再求出所有单向哈密尔顿通路，取其中总权最小的作为较好的排序. 显然，这种方法的实现是极其麻烦. 特别是，当加工零件数增多时，要画出所有的单向哈密顿通路是极其困难的，有时全是不可能的. 因而书中得出的结论是至今没有一个有效算法. 现使用元素判别值分配法进行求解的算法设计.

2.1　表上求解算法

表 2 中各元素格中左上角的数字，表示从 B_i 到 B_j 加工后机器的调整所需的时间(单位为分钟)，则 $C_{ij}=T_{ij}$. 下面是在表上进行求解的步骤. 第 1 步，求元素判别值、元素总检验数. (1) 给 C_{ii} 赋值，取 $r=2$，即

$$C_{ii} = 2\times\max(C_{ii}) = 20.$$

(2) 根据元素判别值的数学模型(4) 计算各个元素的判别值 dX_{ij}. 计算过程从略，计算结果填入表 2 各元素的右上角. (3) 计算 dX_{ij} 的过程，可得出各个元素的总检验数 ZX_{ij}，其值填入表 2 各元素的右下角. 第 2 步，进行调配或求解. 为便于求解过程进行标记，故除去各个元素的命名 X_{ij}. 其调配表如表 3 所示. 根据调配原则，进行表上求解的一般算法为. (1) 选尚未调配的元素中，元素判别值最大(其它参考值依次为总检验数最小、耗费最小元素、下标顺序在前)的元素，如为 X_{ij}. 给 X_{ij} 标上得到调配的顺序号 K(从 1 开始，直到 N)，对其相应的对称元素 X_{ji}，标上“×”，并对第 i 行及第 j 列标上“√”. (2) 检查表上所有行和列是否皆已标上“√”标志. 如果

表 2　初始调配表

排序点	$B1$		$B2$		$B3$		$B4$		$B5$		$B6$		点数
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	
$B1$	0	0	5		3	12	4	10	2	12	1	19	1
	X_{11}	237	X_{12}	－15	X_{13}	－45	X_{14}	－15	X_{15}	－51	X_{16}	－111	
$B2$	1	15	0	0	1	16	2	13	3	9	2	13	1
	X_{21}	－51	X_{22}	201	X_{23}	－81	X_{24}	－51	X_{25}	21	X_{26}	－39	
$B3$	2	12	5	10	0	0	1	19	2	12	3	11	1
	X_{31}	－39	X_{32}	－3	X_{33}	219	X_{34}	－111	X_{35}	－39	X_{36}	－27	
$B4$	1	14	4	12	4	10	0	0	1	15	2	13	1
	X_{41}	－69	X_{42}	－33	X_{43}	9	X_{44}	219	X_{45}	－69	X_{46}	－57	
$B5$	1	18	3	20	4	11	5	10	0	0	5	10	1
	X_{51}	－105	X_{52}	－105	X_{53}	－15	X_{54}	3	X_{55}	219	X_{56}	15	
$B6$	4	9	4	13	2	15	3	12	1	15	0	0	1
	X_{61}	27	X_{62}	－45	X_{63}	－75	X_{64}	－45	X_{65}	－81	X_{66}	219	
点数	1		1		1		1		1		1		6

表 3　元素判别值调配表

排序点	$B1$		$B2$		$B3$		$B4$		$B5$		$B6$		点数	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2		
$B1$	0	0	5	10	3	12	4	10	2	12	1	19	1	
		237		－15		－45	×	－15		－51	2	－111		√2
$B2$	1	15	0	0	1	16	2	13	3	9	2	13	1	
		－51		201	4	－81		－51	×	21		－39		√4
$B3$	2	12	5	10	0	0	1	19	2	12	3	11	1	
		－39	×	－3		219	3	－111		－39		－27		√3
$B4$	1	14	4	12	4	10	0	0	1	15	2	13	1	
	6	－69		－33	×	9		219		－69		－57		√6
$B5$	1	18	3	20	4	11	5	10	0	0	5	10	1	
		－105	1	－105		－15		3		219	×	15		√1
$B6$	4	9	4	13	2	15	3	12	1	15	0	0	1	
	×	27		－45		－75		－45	5	－81		219		√5
点数	1	√6	1	√1	1	√4	1	√3	1	√5	1	√2	6	

尚有未作标志“√”的行或列(有行必有列，反之也一样)，则执行(1)，否则执行(3)．(3) 根据已调配的元素 X_{ij}，计算最小耗费，则

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{ij}\text{“×”}\mathrm{bittest}(K)).$$

这里定义

$$\mathrm{bittest}(k) = \begin{cases} 1, & \text{当 } K \geq 1, \\ 0, & k = 0 \text{ 或为空.} \end{cases}$$

(4) 给出最优排序的Hamilton 通路. 算法结束. 现依照上述的算法, 在表3所示的表上进行求解. (1) 元素判别值最大为 $dX_{52}=20$, 故 $X_{52}=1$, 则在元素格子的左下角, 填入1($K=1$, 标明调配的顺序, 以便更清楚了解调配过程). 给 X_{52} 相应的对称元素 X_{25} 置上"×", 并在第5行和第2列标上相应标志"√"1("√"后的1是为了标明调配的顺序而加上的顺序号, 下同). (2) 在尚未分配且具有分配权的元素中, 其判别值最大的有 $dX_{16}=19$, $dX_{34}=19$. 因两个的总检验数和耗费都相等, 而 X_{16} 在先, X_{34} 在后, 故 X_{16} 先调配, 置为2(本应置1, 这里为表明调配顺序起见而置为2, 即 $K=2$, 下同). 给对称元素 X_{61} 置上"×", 并在第1行和第6列标上相应标志"√"2. (3) 余下未分配且具有分配权的元素中, 判别值最大的为 $dX_{34}=19$, 则置 X_{34} 为3. 给 X_{43} 置上"×", 并在第3行和第4列标上相应标志"√"3. (4) 在尚未分配且具有分配权的元素中, 判别值最大的为 $dX_{23}=16$($X_{51}=18$, 已在第1列具有标志"√"1而不再具有分配权). 置 X_{16} 为4. 给 X_{32} 置上"×", 并在第2行和第3列标上相应标志"√"4. (5) 同样, 对尚未分配且具有分配权的元素进行调配. 判别值最大的且总检验数最小的为

$$dX_{65}=15, \qquad ZX_{65}=-81$$

(虽然 $dX_{45}=15$, 但它的总检验数大, 则 $ZX_{45}=-69$), 置 X_{65} 为5. 给 X_{56} 置上"×", 并在第5行和第6列标上相应标志"√"5. (6) 现仅有 X_{41} 有分配权且 $dX_{41}=14$. 所以置 X_{41} 为6. 给 X_{14} 置上"×", 并在第4行和第1列标上相应标志"√"6. 至此, 求解完成. 其结果如表3所示. 第3步, 计算耗费值, 给出H-通路. 得到分配的元素有

$$X_{52}-X_{23}-X_{34}-X_{41}-X_{16}-X_{65},$$

则排序的H-通路为

$$B2\rightarrow B3\rightarrow B4\rightarrow B1\rightarrow B6\rightarrow B5.$$

最小机器调整时间为

$$1+1+1+1+1=5.$$

这个结果就是最优解, 同原书答案一致.

2.2 计算机程序的求解算法设计

元素判别值求解运筹学调运问题, 已经使用VFP编制成软件, 可在微机586上运行. 排序问题作为其特例, 即 $M=N$ 及 C_{ii} 的值要置为足够大的正数, 程序中使用

$$C_{ii}=2\text{"×"}\max(C_{ij}),$$

进行计算赋值. 一旦数据输入完成, 其调配和求解速度很快, 该题求解记录的记载时间是1 s (因以秒为最小单位记载). 现简述程序求解的算法设计. (1) 输入问题名称、编号、N 的数据及各个排序点的名称, 并存入相应数据文件t-mn, t-gd. (2) 输入耗费数据 $C_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 并存入数据文件t-ibt. (3) 计算给 C_{ii} 赋值的数值, 有

$$C_{ii}=2\text{"×"}\max(C_{ij}), \qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

(4) 按元素判别值的数学模型(4)和总检验数的计算算式(6), 计算问题编号为BH0的各个元素的 dX_{ij}, ZX_{ij}. 以问题编号(字段为BH)、下标 i(字段为IV)、j(字段为JV)值、元素判别值及总检验数等项, 存入数据文件T-yspbj. 并按元素判别值(字段名为PBJ)降序、总检验数(字段名为ZH)升序、耗费值(HF)升序、下标值升序的顺序进行排序(可使用语句sort on pbj/d, zh/a, hf/a, iv/a. jv/a 到文件名). (5) 对排序后的文件进行过滤处理, 即SET FILT TO BH=BH0, 并转向过滤后的首记录. (6) 调配前的变量初始化. $i=0$, $j=0$, $k=1$, HF=0. (7) 选取未

作标记、元素判别值(PBJ)最大且总检验数(ZH)最小的元素 X_{ij}. 将该元素所在的记录作标记 BZ= alltrim(STR(k,3)). 并将IV, JV 分别赋给 i, j. (8) 找 IV= j, JV = i 的记录, 将该元素所在行的标记置为“× ”, 即给 X_{ij} 的对应元素 X_{ij} 作标记. 将 IV= i 的记录及 JV= j 的记录, 作标记 “√ ”+ alltrim(str(k,3)). (9) 如还有未作标记的记录, 则执行(7), 否则转(10). (10) 计算耗费值, 并给出最优通路. 进行结束处理, 算法结束. 该求解算法的实现过程, 可从表4中详细

表 4 计算机程序的求解算法示意表

问题编号	行坐标	列坐标	耗费值	元素判别值	检验数总和	标志(BZ)	说 明
36	5	2	3	20	– 105	1	第 1 个选上
36	1	6	1	19	– 111	2	第 2 个选上
36	3	4	1	19	– 111	3	第 3 个选上
36	5	1	1	18	– 105	√1	注销(5,2)对应列
36	2	3	1	16	– 81	4	第 4 个选上
36	6	5	1	15	– 81	5	第 5 个选上
36	6	3	2	15	– 75	√4	注销(2,3)对应列
36	4	5	1	15	– 69	√5	注销(6,5)对应列
36	2	1	1	15	– 51	√4	注销(2,3)对应行
36	4	1	1	14	– 69	6	第 6 个选上
36	4	6	2	13	– 57	√2	注销(1,6)对应列
36	2	4	2	13	– 51	√3	注销(3,4)对应列
36	6	2	4	13	– 45	√1	注销(5,2)对应列
36	2	6	2	13	– 39	√2	注销(1,6)对应列
36	1	5	2	12	– 51	√2	注销(1,6)对应行
36	1	3	3	12	– 45	√2	注销(1,6)对应行
36	6	4	3	12	– 45	√3	注销(3,4)对应列
36	3	1	2	12	– 39	√3	注销(3,4)对应行
36	3	5	2	12	– 39	√3	注销(3,4)对应行
36	4	2	4	12	– 33	√1	注销(5,2)对应列
36	3	6	3	11	– 27	√2	注销(1,6)对应列
36	5	3	4	11	– 15	√1	注销(5,2)对应行
36	1	4	4	10	– 15	√2	注销(1,6)对应行
36	1	2	5	10	– 15	√1	注销(5,2)对应列
36	3	2	5	10	– 3	√1	注销(5,2)对应列
36	5	4	5	10	– 3	√1	注销(5,2)对应行
36	4	3	4	10	9	“× ”3	注销(3,4)对称点
36	5	6	5	10	15	√1	注销(5,2)对应行
36	2	5	3	9	21	“× ”1	注销(5,2)对称点
36	6	1	4	9	27	“× ”2	注销(1,6)对称点
36	2	2	10	0	201	√1	注销(5,2)对应列
36	3	3	10	0	219	√3	注销(3,4)对应行
36	4	4	10	0	219	√3	注销(3,4)对应列
36	5	5	10	0	219	√1	注销(5,2)对应行
36	6	6	10	0	219	√2	注销(1,6)对应列
36	1	1	10	0	237	√2	注销(1,6)对应行

的注释看到. 实际的分配或调配的过程是极为简单的. 只要从排序后的首记录开始调配(首记录必然调配), 对其对称元素、同行号及同列号的记录作标志. 再将记录指针逐步下移, 如该记录未作任何标志, 便可进行调配并重复进行标志的处理, 直至调配完成. 表 4 中所获得的结果

同表上的调配是完全一致的,也是书中所指出的最优解.

3 结束语

使用《元素判别值分配法》求解单向H-通路,无论是人工在表上进行求解,或使用程序求解,都是有效的.该方法具有明显的优越性.(1) 元素判别值的数学模型简单,计算方便.(2) 分配原则简便.(3) 一次分配可获最优方案.这是现行方法所无法实现的.(4) 具有一定的通用性.元素差别值分酸法不但可以方便地求解单向H-通路问题,并且可用于求解"最小Hamilton圈问题"[4].即Hamilton问题所包括的两个基本最优通路问题,都已经获得较为理想的解决.而且,该方法还能有效地求解调运、指派和货郎担问题[5].同样可以一次调酸得到最优解,无须作任何进一步的调整.这也是当前所有可行的方法所不能达到的功能.因此,它具有独特的创新性.

参 考 文 献

1 中国人民大学数学教研室编.运筹学通论[M].中国人民大学出版社,1990,41～46

2 张银明.元素判别值分配法的研究与实现[J].华侨大学学报(自然科学版),1994,15(4):447～453

3 张银明.元素判别值分配法及其算法设计[J].计算机工程与应用,1995,31(6):25～31

4 张银明.最小Hamilton圈问题的求解新方法[J].华侨大学学报(自然科学版),2003,24(2):194～200

5 张银明.调运、指派和货郎担问题的通用解法的研究——算法设计及其程序实现[J].计算机工程与应用,1996,32(1):26～31

A New Method for Solving One-Way Hamilton Best Path and Its Algorithm Design

Zhang Yinming

(College of Info. Sci. & Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract Hamilton problem comprises minimum Hamilton cycle and one-way Hamilton best path as two basic parts. Both await effective method for solving. By using allocation of element discriminating value, one-way Hamilton best path can be solved. The best one-way Hamilton path as a problem of sorting can be obtaincd only by once allocation. This is an outstanding solution which needs not any adjustment. The author presents here its working system on list and its algorithm design of conputer program.

Keywords problem of sorting, Hamilton circle, one-way Hamilton path, allocation of element discriminating value, algorithm design