

圆拱稳定的变分分析

彭兴黔 郭子雄

(华侨大学土木工程系, 福建 泉州 362011)

摘要 根据势能原理, 建立以位移为基本未知量的圆拱总势能. 采用变分分析, 推导出圆拱在弯曲平面内的平衡微分方程. 应用能量法, 可直接近似计算在均布压力作用下不同支承的变截面圆拱, 以及在非均布压力作用下等截面圆拱屈曲的临界荷载. 算例表明, 能量法计算圆拱稳定问题十分简便, 适合于工程应用.

关键词 圆拱, 屈曲, 变分分析, 能量法

中图分类号 TU 323.301

文献标识码 A

圆拱是一种被广泛应用于土木工程实际中的建筑结构. 在外部压力作用下, 圆拱的受力和稳定计算是工程设计所关心的主要问题. 已有的圆拱受力分析, 均采用静力法建立圆拱平衡微分方程进行求解^[1~3], 但对于截面变化或非均布荷载作用的圆拱用静力法分析非常复杂. 文[4]将变截面圆拱处理成阶梯等截面圆拱, 用静力法建立代数方程组近似求解. 本文采用变分分析, 特别适合于截面变化和非均布荷载作用的圆拱屈曲问题.

1 圆拱弯曲平面内的势能分析

在分析问题时, 假设在圆拱变形过程中, 作用于圆拱上的切向荷载和法向荷载, 始终沿圆拱轴线的切线方向和法线方向, 圆拱的变形为小变形. 现取一圆拱微段进行变形分析. 如图1(a)所示, 设微段 ds 上A点的切向位移为 u , 法向位移为 w , 则B点的切向位移为 $u+du$, 法向

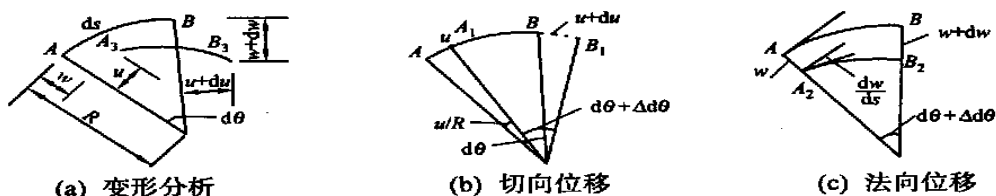


图1 圆拱变表图

位移为 $w+dw$. 在变形微小时, 微段的变形可叠加考虑. 图1(b), (c)分别为仅发生切向位移和法向位移的情况. 从图1可知, 微段的轴向正应变(以位伸为正)为

收稿日期 2003-04-03

作者简介 彭兴黔(1959-), 男, 副教授, 硕士, E-mail: pxq@hqu.edu.cn

基金项目 福建省自然科学基金资助项目(E0010028)

$$\epsilon = \frac{du}{ds} - \frac{w}{R} = \frac{du}{Rd\theta} - \frac{w}{R} = \frac{(u - w)}{R}, \quad (1)$$

式中 R 为圆拱半径. 截面 A 的转角(以顺时针转动为正)为

$$\varphi = u/R + dw/ds = (u + dw/d\theta)/R = (u + w)/R, \quad (2)$$

其曲率改变量为

$$d\varphi ds = (u + w)/R^2. \quad (3)$$

因此, 圆拱应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [EA\epsilon^2 + EI(\frac{d\varphi}{ds})^2] R d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{EA}{R}(u - w)^2 + \frac{EI}{R^3}(u + w)^2 \right] d\theta, \quad (4)$$

式中 E 为材料弹性模量, A 为横截面面积, I 为弯曲平面内的截面惯性矩.

设作用于圆拱上的切向荷载和法向荷载, 分别为 p 和 q . 由图 1 的变形可知, 微段 ds 上的切向荷载和法向荷载所作的功, 分别为 $p ds(u + \varphi R/2) = p [uR + u(u + w)/2] d\theta$, $q ds(w + \varphi R/2) = q [wR + w(w + u)/2]$. 由此, 可得圆拱的外力势能为

$$W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [(pu + qw)R + p(u^2 + uw)/2 + q(w^2 + wu)/2] d\theta. \quad (5)$$

上式中的后两项为荷载方向随圆拱变形而改变时的附加势能. 圆拱的总势能为

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{EA}{R}(u - w)^2 + \frac{EI}{R^3}(u + w)^2 \right] - [2R(pu + qw) + p(u^2 + uw) + q(w^2 + wu)] d\theta. \quad (6)$$

根据势能驻值原理, 可得

$$\delta\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ \left[\frac{EA}{R}(u - w) + \frac{EI}{R^3}(u + w) \right] \delta u - \left[pR + pu + \frac{p}{2}w + \frac{q}{2}w \right] \delta u \right\} d\theta + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ - \left[qR + \frac{EA}{R}(u - w) \right] \delta w - \left[\frac{p}{2}u + \frac{q}{2}u + qw \right] \delta w + \frac{EI}{R^3}(u + w) \delta w \right\} d\theta. \quad (7)$$

上式经分部积分, 可得

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ \left[\frac{EA}{R}(u - w) \right] + \left[\frac{EI}{R^3}(u + w) \right] + \left[pR + pu + \frac{p}{2}w + \frac{q}{2}w \right] \right\} \delta u d\theta + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ - \left[\frac{EA}{R}(u - w) \right] + \left[\frac{EI}{R^3}(u + w) \right] - qR + \left[\frac{p}{2}u \right] + \left[q \left(\frac{u}{2} + w \right) \right] \right\} \delta w d\theta + \left[\frac{EA}{R}(u - w) + \frac{EI}{R^3}(u + w) \right] \delta u \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \left\{ \frac{p}{2} + q \left(\frac{u}{2} + w \right) \left[\frac{EI}{R^3}(u - w) \right] \right\} \delta w \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \frac{EI}{R^3}(u - w) \delta w \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

由于 δu 和 δw 的任意性, 从式(8)中的积分项可得平衡微分方程为

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{EI}{R^3}(u + w) \right] + \left[\frac{EA}{R}(u - w) \right] + pR + pu + \frac{1}{2}pw + \frac{1}{2}qw = 0, \\ & \left[\frac{EI}{R^3}(u + w) \right] + \left[\frac{EA}{R}(u - w) \right] + \left[\frac{1}{2}pu + q \left(\frac{u}{2} + w \right) \right] - qR = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)即文[6]用静力法推导的圆拱平衡微分方程. 由式(8)的 3~5 项, 可得圆拱相应的几何边

界条件和自然边界条件. 常见的边界条件为铰支和固支. 对于铰支边界, $\delta u = \delta w = 0$ 及弯矩 $M = EI(u + w)/R^2 = 0$, 则式(8)的后 3~5 项等于零. 对于固支边界, $\delta u = \delta w = 0$ 及转角 $\delta \varphi = (u + w)/R = 0$, 因 $\delta u = 0$, 有 $\delta w = 0$, 则式(8)的后 3~5 项仍等于零. 若忽略圆拱轴向变形的影响, 即 $u = w$, 式(6)简化为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left[\frac{EI}{R^3} (u + w \Theta)^2 - 2R(pu + qu) - p(u^2 + uw) - q(u^2 + uw) \right] d\theta. \quad (10)$$

式(9)简化为

$$\left[\frac{EI}{R^3} (u + w) \right]^\circ + \left[\frac{EI}{R^3} (u + w) \right] + q(R + u) + \frac{1}{2} p u + p u + p u + q \left(\frac{u}{2} + u \right) + 2q \left(\frac{u}{2} + u \Theta + q(u + u^{(4)}) - qR = 0. \quad (11)$$

当切向荷载 $p = 0$, 而法向荷载 $q = \text{constant}$ 时(受静水压力作用), 则式(11)可简化为

$$\left[\frac{EI}{R^3} (u + u \Theta + qu) \right]^\circ + \left[\frac{EI}{R^3} (u + u \Theta + qu) \right] = 0, \quad (12a)$$

$$\left[\frac{EI}{R^3} (w + w) + qw \right]^\circ + \left[\frac{EI}{R^3} (w + w) + qw \right] = 0. \quad (12b)$$

式(12b)的通解为

$$\frac{EI}{R^3} (w + w) + qw = a + b \cos \theta + c \sin \theta. \quad (13)$$

因此, 式(13)即文[4]的变截面圆拱的稳定微分方程.

2 圆拱稳定的近似计算

应用能量法可直接计算圆拱稳定的临界荷载, 以便理论分析. 当圆拱变截面时, 用静力法计算临界荷载非常困难, 而采用能量法直接计算却较简单. 下面通过两个例题进行说明.

例 1 为便于分析对比, 取文[4]中的例题. 承受静水压力作用的对称型变截面两铰圆拱, 如图 2 所示. 已知拱顶、拱趾和拱趾 1/4 圆处的抗弯刚度分别为 $0.9EI_0$, $1.3EI_0$ 和 $1.1EI_0$, 其圆心角 $2\alpha = 2\pi/3$, 试计算其临界荷载 q_c . 将圆拱抗弯刚度作线性变化考虑, 即 $EI = 0.9EI_0 + 1.2EI_0\theta/\pi$, 忽略轴向变形影响, 且 $p = 0$, $q = \text{constant}$. 则式(10)简化为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left[\frac{EI}{R^3} (u + u \Theta)^2 - 2qRu - q(u^2 + uw) \right] d\theta. \quad (14)$$

取满足铰支约束的位移函数 $u = a_1(1 + \cos 3\theta) + a_2(1 - \cos 6\theta)$, 计算得 $q_c = 8.732 2EI_0/R^3$, 与文[4]结果 $(8.710 9EI_0/R^3)$ 很吻合. 当荷载沿拱轴变化时, 用能量法直接计算仍很简便.

例 2 受法向变化荷载作用的两端铰支等截面圆拱, 如图 3 所示. 已知 $q = q_0(1 - \cos \pi\theta/\alpha)$, 圆拱圆心角 2α . 试计算其临界荷载. 同理取满足铰支约束的位移函数 $u = a(1 + \cos \pi\theta/\alpha)$. 将 q, u 代入式(10), 可计算得

$$\Pi = \frac{\pi^2}{w} \left\{ \frac{EI}{R^3} [(\pi/\alpha)^2 - 1]^2 - (\pi/\alpha)^2 q_0 \right\} a^2 + 4Rq_0 a. \quad (15)$$

令 $\partial \Pi / \partial a = 0$, 得 $a = 4Rq_0 / \pi^2 \left\{ \frac{EI}{R^3} [(\pi/\alpha)^2 - 1]^2 - (\pi/\alpha)^2 q_0 \right\}$, 即位移为

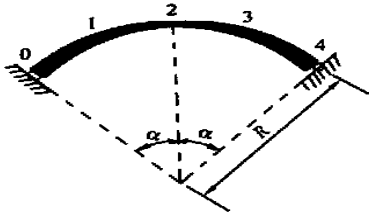


图 2 受静水压力作用的变截面圆拱

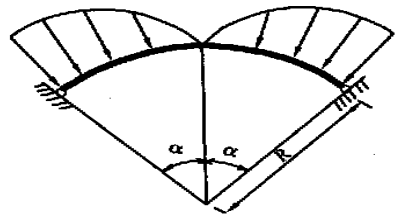


图 3 受变化荷载作用的等截面圆拱

$$u = -4R\alpha q_0 \pi^2 \left\{ \frac{EI}{R^3} (1 + \cos \pi \theta / \alpha) / [(\pi' \alpha)^2 - 1]^2 - (\pi' \alpha)^2 q_0 \right\}.$$

由上式可知, 当位移趋于无穷大时, 意味着圆拱屈曲, 即该受力状态下的临界荷载为

$$q_{0cr} = \{ [(\pi' \alpha)^2 - 1]^2 EI / (\pi' \alpha)^2 \} [EI / R^3]. \quad (16)$$

从结果可知, 在非均布荷载作用下, 其临界荷载小于均布荷载作用下的临界荷载 q_{cr} . 这在圆拱稳定设计中应予以注意. 从此例也可知, 用能量法还可进行圆拱的变形和内力分析.

3 结束语

采用能量法分析圆拱稳定问题, 可适用于各种边界条件、变化截面和任意荷载分布的不同情况, 其计算简便. 类似的稳定分析还可推广应用于圆环和圆管结构. 因能量法依据变分原理和势能驻值原理, 还可对相应结构进行截面优化设计.

参 考 文 献

- 1 Timoshenko S. Theory of elastic stability[M]. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1936. 204 ~ 238
- 2 夏志斌, 潘有昌. 结构稳定理论[J]. 北京: 高等教育出版社, 1988. 244 ~ 251
- 3 项海帆, 刘光栋. 拱结构的稳定与振动[J]. 北京: 人民交通出版社, 1991. 12 ~ 20
- 4 朱先奎, 刘光栋. 变截面圆拱和圆环稳定计算的阶梯折算法[J]. 建筑结构, 1999, (1): 52 ~ 56

Variation Analysis of the Stability of Circular Arch

Peng Xingqian Guo Zixiong

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract The general potential energy of circular arch with displacement as fundamental unknown quantity is established according to principle of potential energy; the equilibrium differential equation of circular arch at a bending plane is derived by adopting variation analysis. By applying energy method, an approximate computation can be directly conducted on nonprismatic circular arch with different bearing under the action of uniformly distributed pressure and also on the critical load of prismatic circular arch in buckling under the action of non-uniformly distributed pressure. As indicated by example of computation, energy method is very simple and convenient for computing the stability of circular arch, it is suitable for engineering application.

Keywords circular arch, buckling, variation analysis, energy method