第 24 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 24 No. 3
2003 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 2003

文章编号 1000-5013(2003)03-0249-05

关于加强 Gerretsen 不等式的一个结果及其应用

吴 善 和

(龙岩学院数学系, 福建 龙岩 364012)

摘要 给出 Gerretsen 不等式一种有着广泛应用价值的幂级数形式的加强式. 这个结果也加强了杨学枝于 1994 年建立的一个著名不等式. 最后运用所得结果, 解决刘保乾关于"Bottema 软件与 Gerretsen 不等式"论述中提出的一个不等式猜想.

关键词 幂级数, Gerretsen 不等式, Euler 不等式, 杨学枝不等式, 加强, 应用

中图分类号 O 178 ∶ O 173. 1 文献标识码 A

1 主要结果

1953 年, Gerretsen 在文 [1] 中建立了关于三角形半周长 s、外接圆半径 R、内切圆半径 r 的重要不等式为

$$16Rr - 5r^2 \le s^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2. \tag{1}$$

Gerretsen 不等式在几何不等式领域有着极其广泛的应用, 是研究几何不等式的有力工具 [2~5]. 它在几何不等式中的地位, 如同 Hölder 不等式在解析不等式中的地位一样重要. 1994 年, 杨学枝在文 [6] 中以其娴熟、精湛的不等式技巧, 给出 Gerretsen 不等式一个十分漂亮的加强形式为

$$16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R-r} \le s^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - \frac{r^2(R-2r)}{R-r}. \tag{2}$$

本文进一步加强上述不等式, 得到如下定理.

定理 设 s, R, r 分别为三角形的半周长、外接圆半径、内切圆半径, 则

$$16Rr - 5r^2 + r(R-2r)\Big[\frac{r}{R-r} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-1-\frac{1}{2}\right)}{n!} \cdot \left(\frac{r}{R-r}\right)^{2n-1}\Big] \le$$

收稿日期 2003-01-15

作者简介 吴善和(1966-), 男, 高级讲师, E-mail: wushanhe@yahoo.com.cn

基金项目 龙岩学院自然科学基金资助项目(2002ZR11)

$$s^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r(R-2r)\Big[\frac{r}{R-r} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots(n-1-\frac{1}{2})}{n!}\cdot\Big(\frac{r}{R-r}\Big)^{2n-1}\Big]. \tag{3}$$

2 一个引理

引理 设 s, R, r 分别为三角形的半周长、外接圆半径和内切圆半径, t 和 λ 为任意实数. 于是有

$$F_1(R,r) + (R-2r)\big(|tR-\lambda r| - \sqrt{R^2-2Rr}\big)^2 \le (tR-\lambda r)s^2 \le F_2(R,r) - (R-2r)\big(|tR-\lambda r| - \sqrt{R^2-2Rr}\big)^2, \tag{4}$$

其中

$$F_1(R,r) = -(t-1)^2R^3 + 2[t^2+(\lambda+5)t-\lambda+2]R^2r - [(4\lambda+1)t+\lambda^2+10\lambda+4]Rr^2 + (2\lambda^2+\lambda)r^3,$$

$$F_2(R,r) = (t+1)^2R^3 - 2[t^2+(\lambda-5)t+\lambda+2]R^2r + [(4\lambda-1)t+\lambda^2-10\lambda+4]Rr^2 - (2\lambda^2-\lambda)r^3.$$

证明 经整理, 式(4) 等价于

$$(tR-\lambda r)(2R^2+10Rr-r^2) - 2|tR-\lambda r|(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \le (tR-\lambda r)s^2 \le (tR-\lambda r)(2R^2+10Rr-r^2) + 2|tR-\lambda r|(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \Leftrightarrow$$

$$|(tR-\lambda r)(s^2-2R^2-10Rr+r^2)| \le 2|tR-\lambda r|(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \Leftrightarrow$$

$$|tR-\lambda r|\big[|s^2-2R^2-10Rr+r^2| - 2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\big] \le 0. \tag{5}$$

由三角形基本不等式[1]

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \le s^2 \le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}$$

知式(5) 成立, 所以式(4) 成立. 引理得证.

3 定理证明

根据Euler 不等式[1] $R \ge 2r$, 有 $R-r \ge r > 0$. 在引理的不等式中, 令 $t=\lambda=1$, 得

$$(R-r)(16Rr-5r^2) + (R-2r)r^2 + (R-2r)(R-r-\sqrt{R^2-2Rr})^2 \le (R-r)s^2 \le (R-r)(4R^2+4Rr+3r^2) - (R-2r)r^2 - (R-2r)(R-r-\sqrt{R^2-2Rr})^2.$$

所以

$$16Rr-5r^2 + r(R-2r)\Big[\frac{r^2+(R-r-\sqrt{R^2-2Rr})^2}{(R-r)r}\Big] \le s^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2 - r(R-2r)\Big[\frac{r^2+(R-r-\sqrt{R^2-2Rr})^2}{(R-r)r}\Big]. \tag{6}$$

令$\frac{r}{R-r}=x$ $(0<x\leq 1)$, 则

$$\frac{r^2+(R-r-\sqrt{R^2-2Rr})^2}{(R-r)r}=\frac{r}{R-r}+\frac{R-r}{r}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R-r}\right)^2}\right]^2=$$

$$x+\frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x}=\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

运用二项式展开公式[8], 有

$$\sqrt{1+t}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}t^n \qquad (-1\leq t\leq 1).$$

可得

$$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-1-\frac{1}{2}\right)}{n!}x^{2n},$$

从而

$$\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{x}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-1-\frac{1}{2}\right)}{n!}x^{2n-1}.$$

所以

$$\frac{r^2+(R-r-\sqrt{R^2-2Rr})^2}{(R-r)r}=\frac{r}{R-r}+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-1-\frac{1}{2}\right)}{n!}\cdot\left(\frac{r}{R-r}\right)^{2n-1}.$$

将上面式子代入式(6)即得不等式(3). 定理得证.

4　定理的应用

由 Euler 不等式 $R\geq 2r$, 可以知道 $0<\frac{r}{R+r}\leq\frac{1}{3}$. 利用函数$\frac{1}{1-x}$的幂级数展开式[8] $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ $(-1<x<1)$, 得

$$\frac{r}{R-r}=\frac{r}{R+r}\left(\frac{1}{1-\frac{2r}{R+r}}\right)=\frac{r}{R+r}\sum_{n=2}^{\infty}2^n\left(\frac{r}{R+r}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n.$$

将$\frac{r}{R-r}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n$代入定理中的不等式, 得如下推论.

推论 1　设 s, R, r 分别为三角形的半周长、外接圆半径、内切圆半径, 则

$$16Rr-5r^2+r(R-2r)Q\leq s^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2-r(R-2r)Q, \tag{7}$$

其中

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(m-1-\frac{1}{2}\right)}{m!}\left[\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n\right]^{2m-1}.$$

由不等式(7)立得

推论 **2** 设 s, R, r 分别为三角形的半周长、外接圆半径、内切圆半径, 则

$$16Rr-5r^2+r(R-2r)\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n\le s^2\le$$
$$4R^2+4Rr+3r^2-r(R-2r)\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n. \tag{8}$$

显然, 式(7),(8)都是 Gerretsen 不等式的加强式. 2000 年, 刘保乾利用中国科学院成都计算机应用研究所杨路教授开发的 Bottema 软件[9~11], 发现一个非常有趣的不等式. 该不等式形式上类似于推论 2 中的不等式, 但强于推论 2 中的不等式. 作为一个猜想, 刘保乾将其收录于文献[1]中, 即

猜想 设 s, R, r 分别为三角形的半周长、外接圆半径、内切圆半径, 则

$$16Rr-5r^2+r(R-2r)T\le s^2\le 4R^2+4Rr+3r^2-r(R-2r)T, \tag{9}$$

其中

$$T=\frac{r}{R+r}+2\left(\frac{r}{R+r}\right)^2+\frac{17}{4}\left(\frac{r}{R+r}\right)^3+\frac{19}{2}\left(\frac{r}{R+r}\right)^4+$$
$$\frac{177}{8}\left(\frac{r}{R+r}\right)^5+\frac{213}{4}\left(\frac{r}{R+r}\right)^6+\frac{8\,421}{64}\left(\frac{r}{R+r}\right)^7+\frac{10\,627}{32}\left(\frac{r}{R+r}\right)^8+$$
$$\frac{109\,159}{128}\left(\frac{r}{R+r}\right)^9+\frac{142\,175}{64}\left(\frac{r}{R+r}\right)^{10}.$$

下面利用推论 1, 证明上述猜想不等式. 根据待证不等式(9), 我们在推论 1 的不等式中, 只要取 Q 中 $\left(\frac{r}{R+r}\right)^i$ 的指数 i 满足 $1\le i\le 10$ 的项. 即在 Q 中取 Q_1 为

$$Q_1=\sum_{n=1}^{10}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n+\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{8}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n\right]^3+\frac{1}{8}\left[\sum_{n=1}^{6}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n\right]^5+$$
$$\frac{5}{64}\left[\sum_{n=1}^{4}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n\right]^7+\frac{7}{128}\left[\sum_{n=1}^{2}2^{n-1}\left(\frac{r}{R+r}\right)^n\right]^9.$$

从而 $Q\ge Q_1$, 所以

$$16Rr-5r^2+r(R-2r)Q_1\le s^2\le 4R^2+4Rr+3r^2-r(R-2r)Q_1.$$

令 $\frac{r}{R+r}=x$, 则 $Q_1=x+2x^2+4x^3+8x^4+16x^5+32x^6+64x^7+128x^8+256x^9+512x^{10}+\frac{1}{4}x^3(1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5+64x^6+128x^7)^3+\frac{1}{8}x^5(1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5)^5+\frac{5}{64}x^7(1+2x+4x^2+8x^3)^7+\frac{7}{128}x^9(1+2x)^9$. 在上面 Q_1 的表达式中, 用多项式乘法公式去括号, 依次按 $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}$ 的顺序合并同类项. 经计算, 它们的系数分别为 1, 2, $\frac{17}{4}$, $\frac{19}{2}$, $\frac{177}{8}$, $\frac{213}{4}$, $\frac{8\,421}{64}$, $\frac{10\,627}{32}$, $\frac{109\,159}{128}$, $\frac{142\,175}{64}$. 所以

$$Q_1\ge 1+2x^2+\frac{17}{4}x^3+\frac{19}{2}x^4+\frac{177}{8}x^5+\frac{213}{4}x^6+$$
$$\frac{8\,421}{64}x^7+\frac{10\,627}{32}x^8+\frac{109\,159}{128}x^9+\frac{142\,175}{64}x^{10}=$$

$$\frac{r}{R+r}+2\left(\frac{r}{R+r}\right)^2+\frac{17}{4}\left(\frac{r}{R+r}\right)^3+\frac{19}{2}\left(\frac{r}{R+r}\right)^4+\frac{177}{8}\left(\frac{r}{R+r}\right)^5+$$
$$\frac{213}{4}\left(\frac{r}{R+r}\right)^6+\frac{8\,421}{64}\left(\frac{r}{R+r}\right)^7+\frac{10\,627}{32}\left(\frac{r}{R+r}\right)^8+$$
$$\frac{109\,159}{128}\left(\frac{r}{R+r}\right)^9+\frac{142\,175}{64}\left(\frac{r}{R+r}\right)^{10}=T.$$

因此, $16Rr-5r^2+r(R-2r)T\le16Rr-5r^2+r(R-2r)Q_1\le s^2\le4R^2+4Rr+3r^2-r(R-2r)Q_1\le4R^2+4Rr+3r^2-r(R-2r)T$. 综上, 猜想不等式(9)得证.

本文定理及其推论的应用十分广泛. 利用它们可得到许多关于 s, R, r 的几何不等式, 也可运用它们加强许多几何不等式. 限于篇幅, 余将另文再叙.

参　考　文　献

1 Gerretsen J C. Ongelijkheden in the driehoek[J]. Nieuw Tijdschr Wisk, 1953, 41: 1～7

2 Mitrinović D S, Pečarić J E, Volenec V. Recent advances in geometric inequalities[M]. Paris: Kluwer Academic Publishers, 1989. 44～45

3 单　. 几何不等式在中国[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1996. 31～137

4 杨学枝. 不等式研究[M]. 拉萨: 西藏人民出版社, 2000. 123～406

5 匡继昌. 常用不等式[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1993. 229～270

6 杨学枝. 一类三角形不等式的统一证法[J]. 数学竞赛, 1994(19): 29～30

7 Bottema O 著. 几何不等式[M]. 单　译. 北京: 北京大学出版社, 1991. 57～58

8 刘玉琏, 傅沛仁. 数学分析讲义: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992. 92～93

9 杨　路. 不等式机器证明的降维算法与通用程序[J]. 高技术通讯, 1998(7): 20～25

10 杨　路, 侯晓荣. 自动发现不等式型定理的一个完备算法[J]. 中国科学(E 辑), 2001, 31(3): 273～288

11 刘保乾. Bottema, 我们看见了什么——三角形不等式研究的新理论、新方法和新结果[M]. 拉萨: 西藏人民出版社, 2003. 422～428

A Result of Sharpening Gerretsen´s Inequality and Its Application

Wu Shanhe

(Dept. of Math., Longyan College, 364012, Longyan, China)

Abstract　A result of sharpening Gerretsen´s inequality is given in the form of power series. The result is of wide application. It also sharpens a well known inequality set up by Yang Xuezhi in 1994, and it solves a conjecture of inequality put forward by Liu Baoquan.

Keywords　power series, Gerretsen´s inequality, inequality Euler´s Yang Xuezhi inequality, strengthen, application