

文章编号 1000-5013(2003)03-0245-04

四阶抛物型方程的一族高精度恒稳的差分格式

曾文平

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 对四阶抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ 构造出一族截断误差阶为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$ 的三层隐式差分格式. 证明它是绝对稳定的, 且可用追赶法求解. 数值例子表明, 文中所提出的格式是有效的, 理论分析与实际计算相吻合.

关键词 四阶抛物型方程, 绝对稳定, 高精度, 隐式差分格式

中图分类号 O 241.82

文献标识码 A

考虑下列四阶抛物型方程初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, & 0 < x < 1, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} &= u(1, t) = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1960年, Cay Jheb 在文[1]中对四阶抛物型方程(1)构造了一个显式差分格式. 但是, 它的稳定性条件为 $r = \Delta t / (\Delta x)^4 \leq \frac{1}{8}$, 十分苛刻, 且截断误差阶仅为 $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$. 另外, 他又提出两个隐式差分格式, 其截断误差阶分别为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ 或 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$. 本文用待定参数法, 对四阶抛物型方程(1)构造出一族含参数的三层高精度隐式差分格式, 其截断误差阶为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$, 并证明它是绝对稳定的. 在特殊情况下, 得到一个三层显格式, 其稳定性条件为 $r \leq \frac{1}{12}$. 最后, 数值例子表明, 本文所建立的格式是有效的, 理论与实际计算相吻合.

1 差分格式的构造

设 Δt 为时间步长, $\Delta x = J^{-1}$ 为空间步长, J 为正整数. 在 (x_j, t_n) 处的网格函数为 u_j^n . 对方程(1), 可建立差分格式为

收稿日期 2002-11-15

作者简介 曾文平(1940-), 男, 教授, E-mail: zengwp@hqu.edu.cn

基金项目 华侨大学科研基金资助项目(01HZR04)

$$\eta_1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \eta_2 \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\eta_3}{2\Delta t} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\eta_4}{2\Delta t} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) + \frac{1}{(\Delta x)^4} \delta_x^4 u_j^n = 0, \quad (2)$$

其中 $\delta_x^4 u_j^n = u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n$ 为关于 x 的四阶中心差分, $\eta_1 \sim \eta_4$ 为待定参数. 假设方程(1)的解充分光滑, 使得关系式

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^q \partial t^p} = (-1)^q \frac{\partial^{p+4q} u}{\partial x^{p+4q}}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

成立. 在节点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ 处进行 Taylor 展开, 并利用关系式(3)可得

$$\begin{aligned} & \{- (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) - 1\} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \{- \frac{\eta_3 + \eta_4}{2} + \frac{1}{6}\} (\Delta x)^2 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \\ & \frac{\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4}{2} \Delta t \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \{- \frac{\eta_3 + \eta_4}{24} + \frac{1}{80}\} (\Delta x)^4 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \\ & O((\Delta t)^2 + \Delta t(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

从式(4)看出, 为使截断误差阶达到 $O((\Delta t)^2 + \Delta t(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$, 必须下列诸式

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 &= 1, \\ \frac{\eta_3 + \eta_4}{2} &= \frac{1}{6}, \\ \frac{\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4}{2} \Delta t + (-\frac{\eta_3 + \eta_4}{24} + \frac{1}{80})(\Delta x)^4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

同时成立. 令 $r = \Delta t / (\Delta x)^4$ 为网格比, 解方程组(5)可得

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{720r} + \frac{\eta}{2}, \\ \eta_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{720r} - \frac{\eta}{2}, \\ \eta_3 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\eta, \\ \eta_4 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\eta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将它们代入格式(2), 便得本文所构造的三层含参数 η 的高精度隐式差分格式为

$$\begin{aligned} & (\frac{1}{3} + \frac{1}{720r} + \frac{\eta}{2}) u_j^{n+1} + (\frac{1}{12} - \frac{\eta}{4}) (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = \\ & (\frac{1}{360r} + \eta) u_j^n - \frac{\eta}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - r \delta_x^4 u_j^n + \\ & (\frac{1}{3} - \frac{1}{720r} - \frac{\eta}{2}) u_j^{n-1} + (\frac{1}{12} + \frac{\eta}{4}) (u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

因为 $\Delta t = O((\Delta x)^4)$, 所以 $O((\Delta t)^2 + \Delta t(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6) = O((\Delta x)^2 + (\Delta x)^6) = O((\Delta x)^6)$. 于是, 格式(7)的截断误差阶实为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6) = O((\Delta x)^6)$.

特别地, 当 $\eta = \frac{1}{3}$ 时, 它是一个三层高精度显式格式, 即

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{720r}\right)u_j^{n-1} + \frac{1}{6}(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}). \quad (8)$$

它的截断误差阶也是 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6) = O((\Delta x)^6)$.

2 稳定性与收敛性

由 Fourier 分析法^[1]容易得出格式(7)的传播矩阵为

$$G(S) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A} & -\frac{C}{A} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其相应的特征方程为

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \quad (10)$$

在式(10)中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} + \frac{1}{720r} + \frac{\eta}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{\eta}{2}\right)\cos\theta, & s &= \sin\frac{\theta}{2}, \quad |\theta| < \pi, \\ B &= \frac{-1}{360r} - \eta + \eta\cos\theta + 16rs^4, & s &= \sin\frac{\theta}{2}, \quad |\theta| < \pi, \\ C &= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{720r} - \frac{\eta}{2}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{\eta}{2}\right)\cos\theta, & |\theta| &< \pi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

引理^[1] 特征方程(10), 当 $A > 0$, 它的两根位于单位圆内或圆上, 且其中一个根, 严格地在单位圆内的充要条件为

$$\begin{cases} A - C > 0, & A + B + C > 0, & A - B + C > 0; \\ A - C > 0, & A + B + C > 0, & A - B + C > 0. \end{cases}$$

显然, 当 $\eta > 0$ 时, $A = \frac{1}{6} + \frac{1}{720r} > 0$, $A - C = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\theta = 1 - \frac{2}{3}s^2 > 0$, $A + B + C = 16rs^4$

0. 当 $\eta < 4r$ 时, 恒有 $A - B + C = \frac{1}{180r} + 4(\eta - 4rs^2)s^2 > 0$. 所以, 当 $\eta - 4r > 0$ 时, 引理条件成立. 由引理知, 特征方程(10)的两根位于单位圆内或圆上, 且一个根严格地在单位圆内. 于是, 根据稳定性理论^[1]及 L_{∞} 的稳定性与收敛性等价性定理, 可得如下基本定理.

定理 当 $\eta < 4r$ 时, 差分格式(7)稳定且收敛. 特别地, 显格式(8)稳定且收敛的充分条件为 $r > \frac{1}{12}$.

3 数值试验

解下列四阶抛物型方程混合问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} &= u(\pi, t) = \frac{\partial^2 u(\pi, t)}{\partial x^2} = 0, & t > 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其精确解为

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x. \quad (13)$$

利用本文格式(7)(当 $\eta=1/3$ 时为格式(8))求数值解,并与精确解进行比较.

取 $\Delta x = \frac{\pi}{32}$, $\Delta t = r(\Delta x)^4$, $r = \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 2$ 时进行计算. 为方便起见, 初始条件用直接转移法转移, 即 $w^0 = \sin j \Delta x$. 第一层的网格函数值 w^1 , 按精确解计算. 边界条件处理同文[1], 即用中心差商代替微商. 因此有 $u^0 = w^0 = 0$, $u^1_{-1} = -u^1_1$, $w^1_{+1} = -w^1_{-1}$ 等等. 然后, 按格式(7)(取 $\eta=4r$) 计算到 $n=500$ 的结果, 如表 1 所示.

表 1 格式(7)的解与精确解(13)数值比较表

x	$r = \frac{1}{12}$		$r = \frac{1}{2}$		$r = 2$	
	精确解(13)	格式(7)解	精确解(13)	格式(7)解	精确解(13)	格式(7)解
$\frac{5\pi}{32}$	0.469 575 633	0.469 575 633	0.460 575 102	0.460 575 100	0.429 578 081	0.429 577 938
$\frac{13\pi}{32}$	0.953 243 476	0.953 243 476	0.934 972 304	0.934 972 299	0.872 048 024	0.872 047 735
$\frac{21\pi}{32}$	0.878 514 219	0.878 514 219	0.861 675 410	0.861 675 406	0.803 684 062	0.803 683 795
$\frac{29\pi}{32}$	0.289 163 247	0.289 163 247	0.283 620 748	0.283 620 746	0.264 532 876	0.264 532 788

由表 1 可以看出, 对于不同的 r , 格式(7)的解与精确解吻合得很好. 这与理论分析是完全一致的.

参 考 文 献

1 萨乌里耶夫 Б К 著. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎译. 北京: 科学出版社, 1963. 34 ~ 166

2 Richtmger R D, Morton K W. Difference method for initial-value problems[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967

3 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis[J]. J. Inst. Math. Appl., 1971, 8: (1): 394 ~ 406

A Family of Highly Accurate and Absolutely Stable Difference Schemes for Solving Parabolic Equation of Four Order

Zeng Wenping

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract A family of three layered, implicit difference schemes with the truncation error in the order of $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$ are constructed for solving parabolic equation of four order. They are proved to be absolutely stable and they can be solved by double sweeping method. As indicated by numerical example, the schemes presented here are effective; and theoretical analysis coincides with actual computation.

Keywords parabolic equation of four order, absolutely stable, high accuracy, implicit difference scheme