

文章编号 1000-5013(2003)03-0239-06

四阶杆振动方程的 $\cosh(x)$ 显式辛格式

黄 浪 扬

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 利用 Hyperbolic 函数 $\cosh(x)$ 构造四阶杆振动方程的任意阶精度的三层显式辛格式, 并进行了稳定性分析.

关键词 四阶杆振动方程, Hamilton 方程组, 函数 $\cosh(x)$, 显式辛格式

中图分类号 O 241. 82

文献标识码 A

1984 年冯康^[1,2]用辛几何的观点, 提出计算 Hamilton 系统的新方法. 他系统地研究了用生成函数构造任意阶精度的辛格式的一般方法. 随后, 秦孟兆等^[3,4]对波动方程的辛格式进行深入研究. 对于下列四阶杆振动方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

设其边界条件是周期的. 在此条件下, 其解具有周期性. 在文 [5] 中, 已经利用 Hyperbolic 函数 $\tanh(x)$ 构造了方程 (1) 的具任意阶精度的有限维空间截断的辛格式. 由于文 [5] 中的 $\tanh(x)$ 辛格式是两层隐式格式, 需解五对角线型代数方程组, 计算量较大. 因此, 本文继续研究由 Hyperbolic 函数 $\cosh(x)$ 所生成的三层显式辛格式, 进而对四个常用格式进行稳定性分析. 数值例子表明, 本文所构造的格式是有效的, 稳定性分析是正确的.

1 格式的构造

利用 $2m$ 阶精度的中心差分算子 $\Delta^2(2m)$, 离散空间导数 $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$. 令 $\Delta^2(2)$ 和 $\Delta^2(4)$ 分别是 $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$ 的二阶和四阶中心差分算子, 则

$$\Delta^2(2) u_j^n = \frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4}, \quad (2)$$

$$\Delta^2(4) u_j^n = \frac{-u_{j+3}^n + 12u_{j+2}^n - 39u_{j+1}^n + 56u_j^n - 39u_{j-1}^n + 12u_{j-2}^n - u_{j-3}^n}{6\Delta x^4}, \quad (3)$$

对周期问题, 它们的相应矩阵为 $M(4, 2)$ 和 $M(4, 4)$, 分别如式 (4), (5) 所示. 即

收稿日期 2002-11-09

作者简介 黄浪扬(1974-), 男, 助教, E-mail: hly6@163.com

基金项目 华侨大学科研基金资助项目(01HZR04)

$$\frac{1}{\Delta x^4} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 1 & -4 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -4 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\frac{-1}{6\Delta x^4} \begin{bmatrix} -56 & 36 & -12 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -12 & 39 \\ 39 & -56 & 39 & -12 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -12 \\ -12 & 39 & -56 & 39 & -12 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -12 & 39 & -56 & 39 & -12 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \\ -12 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -12 & 39 & -56 & 39 \\ 39 & -12 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -12 & 39 & -56 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

这样, 由方程(1)可得线性二阶 Hamilton 方程组为

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = MU, \quad (6)$$

其中 $M = -M(4, 2m)$, $M(4, 2m)$ 是相应于 $\Delta^2(2m)$ 的 $N \times N$ 对称常数矩阵, 且 $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$. 我们称方程组(6)是一个 Hamilton 方程组, 这是由于若令 $\frac{dU}{dt} = V$ 且 $M = -dE/dU$ (E 是位势能量), 则方程组(6)可改写为

$$\frac{dU}{dt} = HV, \quad \frac{dV}{dt} = -HU, \quad (7)$$

其中 $H = \frac{1}{2}V^T V + E(U)$ 是 Hamilton 函数.

由于方程(6)的形式解为 $e^{\Delta t \cdot \overline{M}} U_0$, 其中 U_0 是初值. 于是, 有

$$U^{n+1} + U^{n-1} = e^{\Delta t \cdot \overline{M}} U^n + e^{-\Delta t \cdot \overline{M}} U^n = 2 \cosh(\Delta t \cdot \overline{M}) U^n, \quad (8)$$

其中

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!}. \quad (9)$$

格式(8)在时间方向具有任意阶精度. 然而, 若取 $\cosh(\Delta t \cdot \overline{M})$ 的 $2s$ 阶截断误差表达式

$$\cosh(\Delta t \cdot \overline{M}) = \sum_{l=0}^s \frac{(\Delta t \cdot \overline{M})^{2l}}{(2l)!}, \quad (10)$$

则可得精度为 $O(\Delta t^{2s} + \Delta x^{2m})$ 的差分格式为

$$U^{n+1} + U^{n-1} = 2 \cosh(2s, \Delta t \cdot \overline{M}) U^n. \quad (11)$$

考虑下列形式的三层格式

$$U^{n+1} = \Phi_1 U^n - \Phi_2 U^{n-1}. \quad (12)$$

引理 1^[8] 格式(12)是二阶线性方程(6)的辛格式当且仅当

$$\Phi_1^T = \Phi_1, \quad \Phi_2 = I, \quad (13)$$

其中 I 是 $N \times N$ 单位矩阵. 由于 $\cosh(2s, \Delta t \cdot \overline{M})$ 仍是个对称矩阵, 故由引理 1 知, 格式(11)是辛的. 于是, 有以下定理.

引理 1 格式(11) 是逼近方程(1), 具有 $O(\Delta t^{2s} + \Delta x^{2m})$ 阶精度的三层显式辛格式.

为方便起见, 记方程(1) 的精度为 $O(\Delta t^{2s} + \Delta x^{2m})$ 的辛格式(11) 为 $\text{SCRM}(2s, 2m)$. 下面, 给出两种(4 个) 由函数 $\cosh(x)$ 所生成的三层显式辛格式. (1) 对格式(11), 若只取 $\cosh(x)$ 的前两项, 便得二阶精度辛格式为

$$U^{n+1} - 2 \left[I + \frac{\Delta t^2}{2} M \right] U^n + U^{n-1} = 0. \quad (14)$$

若 $M = -M(4, 2)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$, 记作 $\text{SCRM}(2, 2)$; 若 $M = -M(4, 4)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$, 记作 $\text{SCRM}(2, 4)$. (2) 对格式(11), 若取到 $\cosh(x)$ 的第 3 项, 便得到四阶精度辛格式为

$$U^{n+1} - 2 \left[I + \frac{\Delta t^2 M}{2} + \frac{\Delta t^4 M^2}{24} \right] U^n + U^{n-1} = 0. \quad (15)$$

若 $M = -M(4, 2)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^4 + \Delta x^2)$, 记作 $\text{SCRM}(4, 2)$; 若 $M = -M(4, 4)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$, 记作 $\text{SCRM}(4, 4)$.

2 稳定性分析

首先介绍文 [6] 中的 Miller 判别准则. 设 $f(z)$ 是复平面上的 n 次多项式, 即

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_0 a_n \neq 0. \quad (16)$$

定义多项式

$$f^*(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n, \quad (17)$$

这里 \bar{a}_i 表示 a_i 的共轭复数, $i = 0, 1, \dots, n$. 如果恒等式

$$f^*(0)f(z) = f(0)f^*(z) \quad (18)$$

成立, 则 $f(z) = 0$ 的根按模小于等于 1, 其充要条件为 $f^*(z) = 0$ 只有按模小于等于 1 的根.

引理 2 矩阵 $M = -M(4, 2)$ 的特征值为

$$\lambda^{(2)} = -\frac{1}{\Delta x^4} (4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N})^2, \quad (19)$$

矩阵 $M = -M(4, 4)$ 的特征值为

$$\lambda^{(4)} = -\frac{1}{\Delta x^4} (1 + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{k\pi}{2N}) (4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N})^2, \quad (20)$$

其中 $k = 0, 1, \dots, N-1$. 下面就 4 个常用的辛格式进行稳定性分析, 其余也可类似分析.

定理 2 逼近四阶杆振动方程 $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$, 其周期边值问题辛格式 $\text{SCRM}(2, 2)$, $\text{SCRM}(2, 4)$, $\text{SCRM}(4, 2)$, $\text{SCRM}(4, 4)$ 的稳定性条件, 分别为 $\Delta t / \Delta x^2 \leq 0.5$, $\Delta t / \Delta x^2 \leq 15/10$, $\Delta t / \Delta x^2 \leq 3/2$, $\Delta t / \Delta x^2 \leq 5/10$. 这里的稳定性均指弱稳定性, 因为 Miller 判别准则是针对弱稳定性的. 对于一般的稳定性条件, 还需要更复杂的判别准则. 应用这个准则, 可把等号去掉.

证明 (1) 格式 $\text{SCRM}(2, 2)$ 的稳定性证明. 此时其过渡矩阵的特征方程为

$$\zeta^2 - (I + \eta^2/2)\zeta + 1 = 0, \quad (21)$$

其中 $\eta = \Delta t \sqrt{\lambda^{(2)}}$, 即 $\eta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}$ 代入上式得

$$\zeta^2 - 2[I - \frac{8\Delta t^2}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{k\pi}{2N}] \zeta + 1 = 0. \quad (22)$$

令 $\frac{\Delta t}{\Delta x} 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2N} = \mu$, 则上式可写成

$$\zeta^2 - 2(I - 8\mu^2) \zeta + 1 = 0. \quad (23)$$

为使上述特征方程的根 ζ 按模小于等于 1, 其充要条件为 $f(\zeta = 0)$ 有按模小于等于 1 的根, 并等价于

$$|1 - 8\mu^2| \leq 1. \quad (24)$$

此不等式只有当 $\Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2 = 0.5$ 时成立. (2) 格式 SCRM(2, 4) 的稳定性证明. 此时过渡矩阵的特征方程为

$$\zeta^2 - 2(I + \eta^2/2) \zeta + 1 = 0, \quad (25)$$

其中 $\eta = \Delta t \cdot \overline{\lambda_k^{(4)}}$, 也即 $\eta = \Delta t \cdot -\frac{1}{\Delta x^4} (1 + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{k\pi}{2N}) (4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N})^2$. 可令 $\mu = i \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot$

$16 \sin^4 \frac{k\pi}{2N} + \frac{32}{2} \sin^6 \frac{k\pi}{2N}$, 则上式可写成

$$\zeta^2 - 2(I + \frac{\mu^2}{2}) \zeta + 1 = 0. \quad (26)$$

为使上述特征方程的根 ζ 按模小于等于 1, 仅需 $f(\zeta = 0)$ 的根按模小于等于 1, 即

$$|1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} (8 \sin^4 \frac{k\pi}{2N} + \frac{16}{3} \sin^6 \frac{k\pi}{2N})| \leq 1, \quad (27)$$

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} (4 \sin^4 \frac{k\pi}{2N} + \frac{8}{3} \sin^6 \frac{k\pi}{2N}) \leq 1. \quad (28)$$

显然 $\alpha = 90^\circ$ 时, 函数 $4 \sin^4 \alpha + 8/3 \sin^6 \alpha$ 达到极值

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} (4 + \frac{8}{3}) \leq 1, \quad (29)$$

所以格式的稳定性条件为 $\Delta t / \Delta x^2 \leq \sqrt{15/10} = 0.3873$. (3) 格式 SCRM(4, 2) 的稳定性证明. 此时, 其过渡矩阵的特征方程为

$$\zeta^2 - 2(I + \eta^2/2 + \eta^2/24) \zeta + 1 = 0, \quad (30)$$

其中 $\eta = \Delta t \cdot \overline{\lambda_k^{(2)}}$, 即 $\eta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} 4i \sin^2 \frac{k\pi}{2N}$, 代入上式得

$$\zeta^2 - 2(I - \frac{8\Delta t^2}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{k\pi}{2N} + \frac{32}{3} \frac{\Delta t^4}{\Delta x^8} \sin^8 \frac{k\pi}{2N}) \zeta + 1 = 0. \quad (31)$$

令 $\frac{\Delta t}{\Delta x} 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2N} = \mu$, 则上式可写成

$$\zeta^2 - 2(I - 8\mu^2 + \frac{32}{3}\mu^4) \zeta + 1 = 0. \quad (32)$$

为使上述特征方程的根 ζ 按模小于等于 1, 仅需 $f(\zeta = 0)$ 的根按模小于等于 1, 即

$$|\frac{32}{3}\mu^4 - 8\mu^2 + 1| \leq 1. \quad (33)$$

不难证明, 此不等式只有当 $\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$ 时成立. (4) 格式 SCRM(4, 4) 的稳定性证明.

$$\zeta^2 - 2(I + \eta^2/2 + \eta^2/24)\zeta + 1 = 0,$$

(34)

其中 $\eta = \Delta t \cdot \sqrt{\lambda^{(4)}}$, 也即 $\eta = \Delta t \cdot \sqrt{-\frac{1}{\Delta x^4}(1 + \frac{2}{3}\sin^2\frac{k\pi}{2N})(4\sin^2\frac{k\pi}{2N})^2}$. 于是, 令 $\mu = i\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \sin^4\frac{k\pi}{2N} + \frac{2}{3}\sin^6\frac{k\pi}{2N}$, 则上式可写成

$$\zeta^2 - 2(I + 8\mu^2 + \frac{32}{3}\mu^4)\zeta + 1 = 0.$$

(35)

为使上述特征方程的根 ζ 按模小于等于 1, 仅需 $f(\zeta = 0)$ 的根按模小于等于 1, 即

$$|\frac{32}{3}\mu^4 + 8\mu^2 + 1| \leq 1.$$

(36)

为满足上述不等式, 需要

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^4}(\sin^4\frac{k\pi}{2N} + \frac{2}{3}\sin^6\frac{k\pi}{2N}) \leq \frac{3}{4}.$$

(37)

显然, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 函数 $\sin^4\alpha + 2/3\sin^6\alpha$ 达到极值. 所以, 格式的稳定性条件为 $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{10} \approx 0.6708$. 由定理 1 可见, 由函数 $\cosh(x)$ 所生成的三层显式辛格式, 在空间方向提高精度会缩小稳定性区域. 而在时间方向提高精度则会扩大稳定性区域.

3 数值例子

考虑初边值问题

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad t \geq 0,$$

(38)

其初始条件为

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

(39)

周期边界条件为 $u(0, t) = u(2\pi, t)$, $t \geq 0$. 上述问题的精确解为 $u(x, t) = \sin x \cos t$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). 用 $u(n, j)$ 表示差分解在 $t = n\Delta t$, $x = j\Delta x$ 时的解. 表 1 给出 4 个格式在临界值的稳定情况, 表中 r 为步长比. 计算结果符合格式的稳定性条件, 并且所有 4 个格式的稳定性在临界值附近都很敏感. 计算结果与理论分析相符合.

表 1 4 种格式的函数值表

r	临界值	$u(1\ 000, 5)$	$u(1\ 000, 10)$	$u(1\ 000, 15)$	$u(1\ 000, 20)$
SCRM (2, 2), $\Delta x = 0.078\ 5$					
0.500 0	计算值	- 0.382 019 3	- 0.705 879 6	- 0.922 276 1	- 0.998 264 5
	精确值	- 0.382 054 5	- 0.705 944 6	- 0.922 361 1	- 0.998 356 4
0.500 1	计算值	- 128.495 91	127.407 97	- 129.036 18	127.115 57
	精确值	- 0.382 067 9	- 0.705 969 5	- 0.922 393 6	- 0.998 391 6
SCRM (2, 4), $\Delta x = 0.078\ 5$					
0.387 3	计算值	- 0.279 343 8	- 0.516 160 0	- 0.674 395 5	- 0.729 960 4
	精确值	- 0.279 344 0	- 0.516 160 3	- 0.674 396 0	- 0.729 960 9
0.387 4	计算值	- 57 885.793	57 884.997	- 57 886.18	57 884.78
	精确值	- 0.279 505 2	- 0.516 458 3	- 0.674 785 4	- 0.730 382 4

续表

r	临界值	$u(1\ 000, 5)$	$u(1\ 000, 10)$	$u(1\ 000, 15)$	$u(1\ 000, 20)$
SCRM (4, 2), $\Delta x=0.078\ 5$					
0.866 0	计算值	0.224 462 7	0.414 753 0	0.541 901 0	0.586 549 4
	精确值	0.225 311 9	0.416 322 2	0.543 951 1	0.588 768 5
0.866 1	计算值	- 12 411.759	12 412.399	- 12 411.441	12 412.571
	精确值	0.225 502 7	0.416 674 7	0.544 411 7	0.589 267 0
SCRM (4, 4), $\Delta x=0.078\ 5$					
0.670 8	计算值	- 0.207 975 1	- 0.384 287 9	- 0.502 096 4	- 0.543 465 2
	精确值	- 0.207 974 4	- 0.384 286 6	- 0.502 094 6	- 0.543 463 3
0.670 9	计算值	溢出	溢出	溢出	溢出
	精确值	- 0.207 776 2	- 0.383 920 3	- 0.501 616 1	- 0.542 945 3

参 考 文 献

1 Feng Kang, Qin Mengzhao. The symplectic methods for the computation of Hamiltonian equations[A]. In: Zhu Youlan, eds. Proc. of 1st Chinese Cong. on Numerical Methods of PDE's, March 1986, Shanghai, Lecture notes in Math. [C]. Berlin: Springer, 1987. 1~37

2 Feng Kang. On difference schemes and symplectic geometry[A]. In: Feng K, eds. Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Computation of Partial Differential Equations[C]. Beijing: Science Press, 1985. 42~58

3 秦孟兆. 波动方程两种哈密顿型蛙跳格式[J]. 计算数学, 1988, 10(3): 272~281

4 Qin Mengzhao, Zhu Wenjie. Construction of symplectic schemes for wave equations via hyperbolic functions $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$ [J]. Comput. Math. Appl., 1993, 26(8): 1~11

5 黄浪扬. 四阶杆振动方程的 $\tanh(x)$ 辛算法[J]. 华侨大学学报 (自然科学版), 2002, 23(3): 217~221

6 Miller J H. On the location of zeros of certain class of polynomials with application to numerical analysis [J]. J. Inst. Math. Appl., 1971, 8: 397~409

Explicit Symplectic Scheme of Four-Order Rod
Vibration Equation via Function $\cosh(x)$

Huang Langyang

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract By applying Hyperbolic function $\cosh(x)$, the author constructs a three-level explicit symplectic scheme for four-order rod vibration equation with precision of arbitrary order; and carries out stability analysis.

Keywords four-order rod vibration equation, Hamilton's equations, function $\cosh(x)$, explicit symplectic scheme