第 24 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.24 No.3
2003 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul.2003

文章编号 1000-5013(2003)03-0234-05

矩阵的最大公因子的结构

宋 海 洲

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 提出任意两个方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行(列)最简形右(左)最大公因子的概念. 证明任意两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行(列)最简形右(左)最大公因子的存在唯一性, 利用行(列)最简形右(左)最大公因子给出了 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的所有右(左)最大公因子构成的集合的表示, 给出求它们的简便方法. 最后将其推广至多个矩阵情形.

关键词 矩阵, 右公因子, 右最大公因子, 行最简形右最大公因子, 行最简形

中图分类号 O 151.21 文献标识码 A

1 问题的提出

关于矩阵的最大公因子, 文[1]给出其定义.

定义 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上的矩阵, 如果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 适合存在 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$, 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C},\qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右公因子.

对于左公因子的概念类似可以定义.

定义 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上的矩阵, 如果矩阵 $\boldsymbol{D}$ 适合以下两个条件, 则称 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子, (1) $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右公因子. (2) 如果 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的任一右公因子, 则 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 的右公因子, 即有矩阵 $\boldsymbol{C}_1$, 使

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}.$$

同样可以定义左最大公因子. 文[1]证明任意两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 必存在右最大公因子, 且给出一个右最大公因子的求法. 本文提出任意两个方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行(列)最简形右(左)最大公因子的概念, 证明任意两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行(列)最简形右(左)最大公因子的存在唯一性. 利用行(列)最简形右(左)最大公因子, 给出 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的所有右(左)最大公因子构成的集合的表示. 同时给出求它们的简便方法, 尔后将其推广至多个矩阵情形. 现将行最简形右最大公因子作如下定义.

定义 3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上的矩阵, $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子, 且 $\boldsymbol{D}$ 为行最简形[2], 则称 $\boldsymbol{D}$ 为行最简形右最大公因子.

收稿日期 2002-11-09

作者简介 宋海洲(1971-), 男, 讲师, E-mail: hzsong@hqu.edu.cn

列最简形左最大公因子可类似定义. 记 V 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 所有右最大公因子构成的集合. 那么, 我们有表示: $V=\{\boldsymbol{PD}\ \boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行最简形右最大公因子, $\boldsymbol{P}$ 为任意可逆阵$\}$.

2　行最简形右最大公因子的存在唯一性

引理 1[1]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上任意两个 n 阶方阵. 那么, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子存在, 且有 1 个右最大公因子为 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{QB}$ 形式, 其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为数域 P 上两个 n 阶方阵.

引理 2　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上任意两个 n 阶方阵, $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的任意 1 个右最大公因子. 那么, 对任意的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{PD}$ 也为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子.

证明　由 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子, 则存在 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}$. 故

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{PD}),\qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{PD}).$$

从而 $\boldsymbol{PD}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右公因子. 设 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的任一个右公因子, 由于 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的一个右最大公因子, 故存在 $\boldsymbol{C}_1$, 使 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}$, 从而有 $\boldsymbol{PD}=(\boldsymbol{PC}_1)\boldsymbol{C}$. 即 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{PD}$ 的右因子, 故 $\boldsymbol{PD}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子.

定理 1　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上任意两个 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必存在行最简形右最大公因子. 此即行最简形右最大公因子的存在性定理.

证明　由引理 1, 知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子存在. 设 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的 1 个右最大公因子, 而任意矩阵一定能够经过初等行变换[3]化为行最简形. 设 $\boldsymbol{D}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{D}_1$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PD}=\boldsymbol{D}_1$. 由引理 2 知, $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子. 又 $\boldsymbol{D}_1$ 为行最简形, 故 $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行最简形右最大公因子. 从而定理得证.

定理 2　设 $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行最简形右最大公因子, $\boldsymbol{D}_2$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行最简形右最大公因子, 则 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_2$(行最简形右最大公因子的唯一性定理).

证明　设

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_s\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

其中 $r=r(\boldsymbol{D}_1)$, $s=r(\boldsymbol{D}_2)$. 由于 $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右最大公因子, $\boldsymbol{D}_2$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的右公因子, 可知存在 $\boldsymbol{C}_1$, 使得 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{D}_2$. 同理, 存在 $\boldsymbol{C}_2$, 使得 $\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{D}_1$. 从而, $\boldsymbol{D}_1$ 的行向量组与 $\boldsymbol{D}_2$ 的行向量组等价, 故有 $r=s$, 及行向量组 $a_1,\cdots,a_r$ 与行向量组 $b_1,\cdots,b_r$ 等价. 所以存在 $k_{ij}(i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,r)$, 使得

$$\begin{cases}a_r=k_{r1}b_1+\cdots+k_{rr}b_r,\\ a_{r-1}=k_{r-1,1}b_1+\cdots+k_{r-1,r}b_r,\\ \quad\vdots\\ a_1=k_{11}b_1+\cdots+k_{1r}b_r.\end{cases}$$

利用 $\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ 为行最简形, 可以推得以下 4 个结论. (1) $k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{ir}$ 中第 1 个非 0 数必为

1. 设 $k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{ir}$ 中第 1 个非 0 数必为 k_{ij} 且 $k_{ij} \neq 1$, 则

$$a_i = k_{ij} b_j + k_{i(j+1)} b_{j+1} + \cdots + k_{ir} b_r.$$

从而, a_i 的第 1 个非 0 数为 k_{ij} 不等于 1, 与 a_i 为 $\boldsymbol{D}_1$ 的行最简形的一行矛盾. (2) 设 $i < j$, $k_{i1}, \cdots, k_{ir}$ 第 1 个非 0 数为 k_{is}, 而 $k_{j1}, \cdots, k_{jr}$ 第 1 个非 0 为 k_{jt}, 则 $s < t$. 不然设有 $s \geq t$, 则由

$$a_i = k_{i1} b_1 + \cdots + k_{ir} b_r = k_{is} b_s + \cdots + k_{ir} b_r$$

知 a_i 的第 1 个非 0 数的所在的列数等于 b_s 的第 1 个非 0 数所在的列数. 同理, a_j 的第 1 个非 0 数的所在的列数等于 b_t 的第 1 个非 0 数所在的列数. 由 $s \geq t$ 可得, b_s 的第 1 个非 0 数所在的列数 $\geq b_t$ 的第 1 个非数所在的列数. 从而, a_i 的第 1 个非 0 数所在的列数 $\geq a_j$ 的第 1 个非 0 数所在的列数, 而 $i < j$, a_i, a_j 为行最简形 $\boldsymbol{D}_1$ 的两行, 可知这是不可能的. 从而矛盾. (3) 由(2) 可知 $k_{r1}, \cdots, k_{rr}$ 中第 1 个非 0 数必为 k_{rr}, 又由(1) 知有 $k_{rr} = 1$, 即有 $k_{r1} = \cdots = k_{r\,r-1} = 0$, $k_{rr} = 1$, 从而 $a_r = b_r$. (4) 记 a_r. b_r 第 1 个非 0 数所在的列为 l, 则 $a_1, \cdots, a_{r-1}$ 及 $b_1, \cdots, b_{r-1}$ 的第 l 列均为 0, 故

$$k_{i1} b_1 + \cdots + k_{ir} b_r (i = 1, \cdots, r-1)$$

的第 l 列为 k_{ir}, 利用

$$a_i = k_{i1} b_1 + \cdots + k_{ir} b_r (i = 1, \cdots, r-1),$$

可知 $k_{ir} = 0 (i = 1, \cdots, r-1)$. 从而有

$$\begin{cases} a_1 = k_{i1} b_1 + \cdots + k_{i\,r-1} b_{r-1}, \\ \\ a_{r-1} = k_{r-1,1} b_1 + \cdots + k_{r-1,r-1} b_{r-1}. \end{cases}$$

用类似(3) 的方法可证 $a_{r-1} = b_{r-1}$. 同理可证

$$a_{r-2} = b_{r-2}, \quad \cdots \quad, a_1 = b_1.$$

从而 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$.

3 右最大公因子的结构

定理 3 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为数域 $\bar{P}$ 上的任意 n 阶方阵, 记 $\boldsymbol{V}$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的所有右最大公因子构成的集合, 则 $V = \{\boldsymbol{PD} \mid \boldsymbol{P}$ 为任意一个 n 阶可逆方阵, $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的任意给定的一个右最大公因子$\}$.

证明 设 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 任意给定的一个右最大公因子. 一方面, 由引理 2 知, 任意给定可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{PD}$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的右最大公因子. 另一方面, 设 $\boldsymbol{Q}_1$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的任意一个右最大公因子. 对 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{D}$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ 使得 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_2$ 为行最简形. 由引理 2 知 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ 均为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的右最大公因子, 故 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的行最简形右最大公因子. 由定理 2 可得 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$, 从而

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{D}, \qquad \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{D}.$$

令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$, 则 $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{PD}$ 且 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 故定理 3 成立.

推论 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为数域 $\bar{P}$ 上任意 n 阶方阵, $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的行最简形右最大公因子, 记 V 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 所有右最大公因子构成的集合. 则 $V = \{\boldsymbol{PD}_1 \mid \boldsymbol{P}$ 为任意一个 n 阶可逆方阵, $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的行最简形右最大公因子$\}$.

定理 4 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的右最大公因子 $\Leftrightarrow \boldsymbol{D}$ 的行向量组与 $[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的行向量组等价.

证明 (1) 充分性. 引理 1 知, 存在 $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的右最大公因子, 且有表示 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的右最大公因子, 又由定理 3 知, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{PD}_1$, 从而

$$D = PP_1A + PQ_1B = (PP_1, PQ_1)[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

另一方面,由 D 为 A,B 的右公因子可知,存在 A_1, B_1,使得 $A = A_1D, B = B_1D$. 从而$[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [A_1^{\mathrm{T}} \quad B_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}D$;故 D 的行向量组与$[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的行向量组等价.

(2) 必要性. 设D 的行向量组与$[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的行向量组等价. 必有 P, Q, A_1, B_1,使得$D = (P, Q)[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [A_1^{\mathrm{T}} \quad B_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}D$. 由$[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [A_1^{\mathrm{T}} \quad B_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}D$ 知,D 为 A,B 的右公因子. 设 C 为 A,B 的任意一个右公因子,则存在 A_2, B_2,使得$[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [A_2^{\mathrm{T}} \quad B_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}C$. 于是有 $D = (P, Q)[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = (P, Q)[A_2^{\mathrm{T}} \quad B_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}C = (PA_2 + QB_2)C$,故 C 为 D 的右因子. 从而 D 必为 A,B 的右最大公因子.

由定理 3 和定理 4,我们可得 A,B 所有右最大公因子构成的集合 V,以及 A,B 的行最简形右最大公因子的简便求法.

(1) 当$[A_{n\times n}^{\mathrm{T}} \quad B_{n\times n}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\text{初等行变换}} [D_{n\times n}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,我们有 $V = \{PD \mid P$ 为任意 n 阶可逆阵$\}$.

(2) 当$[A^{\mathrm{T}} \quad B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} [D_1^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{0}_{n\times n}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 化为行最简形时,D_1 为 A,B 的行最简形右最大公因子. 如求 A,B 的所有右最大公因子及行最简形右最大公因子,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

可解得$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} \begin{bmatrix} D_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} D_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$,其中

$$D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此,可得

$$V = \left\{ P\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| P \text{ 为任意 } n \text{ 阶可逆阵} \right\} = \left\{ P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| P \text{ 为任意 } n \text{ 阶可逆阵} \right\}.$$

其中 A,B 的行最简形右最大公因子为 D_1.

推论　(1) 类似地定义列最简形和 A,B 的列最简形左最大公因子. 有 A,B 的列最简形左最大公因子存在且唯一. (2) A,B 所有左最大公因子构成的集合有表示 $V = \{DP \mid D$ 为 A,B 的列最简形左最大公因子,P 为任意 n 阶可逆矩阵$\}$. (3) D 为 A,B 的左最大公因子$\Leftrightarrow D$ 的列向量组与(A, B)的列向量组等价. (4) A,B 的列最简形左最大公因子的简便求法. 对(A, B)进行初等列变换化为列最简形$(D_{n\times n}, \mathbf{0}_{n\times n})$时,$D_{n\times n}$就是 A,B 的列最简形左最大公因子.

4　一些推广

定义 4　$A_1, \cdots, A_k$ 为 P 上 n 阶方阵,如果 C 适合: 存在 $B_1, \cdots, B_k$,使得$[A_1^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad A_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} =$

$[\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$, 则称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的右公因子. $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的左公因子类似定义.

定义 5 如果 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的右公因子, 且对任意 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的右公因子 $\boldsymbol{C}$, 有 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 的右因子, 即存在 $\boldsymbol{C}_1$ 使得 $\boldsymbol{D}= \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}$, 则称 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的右最大公因子. $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的左最大公因子类似定义: 类似定义 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的行最简形右最大公因子, 列最简形左最大公因子. 引理 1、定理 1、定理 2、定理 3 和定理 4 的结论可推广至 k 个矩阵情形. 即有:

定理 5 (1) $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的右最大公因子 $\boldsymbol{D}$ 存在, 且至少有一个可表示为 $\boldsymbol{D}= \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_1+ \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_2+ \cdots+ \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}_k$. (2) $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的行最简形右最大公因子存在且唯一. (3) 设 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的所有右最大公因子构成的集合为 V, 则 $V= \{\boldsymbol{PD} \mid \boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的行最简形右最大公因子, $\boldsymbol{P}$ 为任意 n 阶可逆矩阵$\}$. (4) $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的右最大公因子 $\Leftrightarrow \boldsymbol{D}$ 的行向量组与 $[\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \ \cdots \ \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的行向量组等价. (5) 对 $[\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \ \cdots \ \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 进行初等行变换化为行最简形 $[\boldsymbol{D}_{n\times n}^{\mathrm{T}} \ \ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 时, $\boldsymbol{D}_{n\times n}$ 就是 $\boldsymbol{A}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{A}_k$ 的行最简形右最大公因子.

对左最大公因子也有类似的结论.

对 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 为 $m\times n$ 阶矩阵, 也可以类似定义 n 阶方阵为它们的右公因子、右最大公因子、行最简形右最大公因子. 可以先用文[1]的方法证明它们的右最大公因子存在, 而且右最大公因子的行向量组可由 $[\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \ \cdots \ \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的行向量组线性表示. 再利用本文的方法, 可以得到类似定理 5 中(2) ～(5) 的结论.

参 考 文 献

1 张焕玲, 杨昌兰. 矩阵的最大公因子[J]. 工科数学, 2000, 16(6): 93～96

2 同济大学数学教研室编. 线性代数[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2001. 1～100

3 张远达. 线性代数原理[M]. 上海: 上海教育出版社, 1981. 75～82

Structure of Greatest Common Divisor of Matrix

Song Haizhou

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract The right (left) greatest common divisor in row (column) simplest form as a new concept is offered to arbitrary two square matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$. The unique existence of right (left) greatest common divisor in row (column) simplest form for arbitrary two square matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ of n order is proved. By applying right (left) greatest common divisor in row (column) simplest form, the representation of the set constructed by all right (left) greatest divisors of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ can be given, and the simple method for solving them can also be given. The concept is extended to the circumstance of multiple matrices.

Keywords matrix, right common divisor, right greatest common divisor, right greatest common divisor in row simplest form, row simplest form