第 24 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 2
2003 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2003

文章编号　1000-5013(2003)02-0136-07

解四阶杆振动方程新的两类隐式差分格式

曾　文　平

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要　提出解四阶杆振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$(其中 a 为常数)的两类新的四层隐式差分格式. 这两类格式都是无条件稳定的, 其局部截断误差阶分别为 $O(\tau^2+h^2)$, $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)$. 进而在特殊情况下, 得到一个四层显式差分格式, 其稳定性条件为 $r=a\tau/h^2\leq\frac{1}{2}$. 数值例子表明, 这两类格式是有效的.

关键词　四阶杆振动方程, 隐式差分格式, 无条件稳定
中图分类号　O 241.82　　　文献标识码　A

当长度为 L 的梁发生自由振动时, 其位移 $u=u(x,t)$ 满足下列模型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\qquad a\text{ 为常数},\quad 0\leq x\leq L,\quad t\geq 0. \tag{1}$$

当两端简支时, 它还应满足下列定解条件

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\qquad u_t(x,0)=\varphi_1(x),\qquad 0\leq x\leq L \tag{2}$$

及

$$\left.\begin{aligned} &u(0,t)=u(L,t)=0, && t\geq 0,\\ &u_{xx}(0,t)=u_{xx}(L,x)=0, && t\geq 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

文[1～2]对问题(1)～(3)提出两类差分格式, 其中隐格式每计算一时间层需解一个五对角线型线代数方程组, 而显式格式的稳定性条件为 $r\triangleq a\tau/h^2\leq\frac{1}{2}$. 随后, 文[3]又从 Pad´e 逼近出发导出了一些计算格式. 然而随着 Pad´e 逼近阶数的提高, 隐格式的计算量将急剧增加, 而显格式的稳定性条件则更为苛刻. 文[4]提出了若干隐式与半隐式格式, 它们都是无条件稳定的, 改进了文[1～3]的结果. 本文提出两类新的四层的隐式差分格式, 一个需解五对角线型线代数方程组, 另一个只需解三对角线型线代数方程组, 从而可用追赶法方便地求解之, 它们也都是无条件稳定的. 在特殊情况下, 我们得到一个四层显式格式, 其稳定条件为 $r=\frac{1}{2}$, 文末并附有数值算例. 数值试验表明这些格式是有效的.

收稿日期　2002-10-13　　作者简介　曾文平(1940-), 男, 教授
基金项目　华侨大学科研基金资助项目(01HZR04)

1　四层差分格式的构造

把求解区域用两族平行于坐标轴的直线组成的均匀网格剖分．设 h 和 τ 分别表示空间 x 方向和时间 t 方向的步长, 网域由求解区域上的网格点集(x_j, t_n) 所组成．其中, $x_j = jh$, $h = \frac{L}{J}$, $j = 0, 1, 2, \cdots, J$, $t_n = n\tau$, J, n 为正整数．

(A) 四层加权格式(Ⅰ). 对杆振动方程(1), 提出如下的四层加权 β 格式(Ⅰ)为

$$\frac{u_j^{n+3} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_j^n}{2\tau^2} + a^2\frac{\beta\delta_x^4 u_j^{n+3} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\delta_x^4(u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + \beta\delta_x^4 u_j^n}{h^4} = 0, \tag{4}$$

其中 $0 \leq \beta \leq 1$, δ_x^4 为关于 x 的四阶中心差分算子．即 $\delta_x^4 u_j^n = u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n$. 在点$(x_j, t_{n+3/2})$处进行 Taylor 展开, 得

$$\frac{u_j^{n+3} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_j^n}{2\tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{5}{24}\tau^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + O(\tau^4), \tag{5}$$

$$\frac{\beta\delta_x^4 u_j^{n+3} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\delta_x^4(u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + \beta\delta_x^4 u_j^n}{h^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{1 + 16\beta}{8}\tau^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial t^2} + \frac{h^2}{80}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + O(\tau^3 + \tau^2 h^2 + \tau h^4 + h^6). \tag{6}$$

并且注意到, 当方程(1)的解足够光滑时有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = -a^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial t^2} = a^4\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}, \tag{7}$$

则由上述各式可得格式(Ⅰ)(即式(4))的局部截断误差为

$$R_j^{n+3/2} = \frac{a^2}{6}h^2\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_j^{n+3/2} + \frac{1 - 24\beta}{12}\tau^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_j^{n+3/2} + O(\tau^3 + \tau^2 h^2 + \tau h^4 + h^6), \tag{8}$$

即格式(Ⅰ)的局部截断误差为

$$R_j^{n+3/2} = \begin{cases} O(\tau^2 + h^2), & \beta \neq \frac{1}{24}, \\ O(\tau^3 + h^2), & \beta = \frac{1}{24}. \end{cases} \tag{9}$$

(B) 三对角线型四层隐格式(Ⅱ). 对方程(1)引入人工粘性项 $2a\gamma\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}$ 使之化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2a\gamma\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}. \tag{10}$$

对式(10)加以离散化, 可得隐式差分格式(Ⅱ)为

$$\frac{u_j^{n+3} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_j^n}{2\tau^2} + \frac{a^2\delta_x^4(u_j^{n+2} + u_j^{n+1})}{2h^4} =$$

$$\frac{a^2\delta_x^2(u_j^{n+3}-(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+u_j^n)}{h^4},\qquad \begin{pmatrix} & * & * & * & \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & \end{pmatrix}. \tag{11}$$

在点$(x_j, t_{n+3/2})$处,进行Taylor展开得

$$\frac{\delta_x^2(u_j^{n+3}-(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+u_j^n)}{2\tau^2h^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}+$$

$$\frac{5}{24}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\frac{\partial^6 u}{\partial t^4\partial x^2}+\frac{5}{288}\tau^2\frac{\partial^8 u}{\partial t^4\partial x^4}+O(\tau^2+h^2+h^4). \tag{12}$$

并利用关系式(5)及式(7)可得格式(Ⅱ)(即式(11))的局部截断误差为

$$R_j^{n+3/2}=\frac{a^2h^2}{6}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_j^{n+3/2}+\frac{3}{8}\tau^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_j^{n+3/2}-2a^2\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}\right)_j^{n+3/2}+$$

$$O\left(\tau^4+h^4+\left(\frac{\tau}{h}\right)^4\right)=O\left(\tau^2+h^2+\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right). \tag{13}$$

由定解条件(2),(3)并利用方程(1)离散化得:(1) $u_j^0=\varphi_0(x_j)\triangleq\varphi_{0j}$,并由如下两式定出$u_j^1$与$u_j^{-1}$有$\frac{u_j^1-u_j^{-1}}{2\tau}=\varphi_1(x_j)\triangleq\varphi_{1j}$及$\frac{u_j^1-2u_j^0+u_j^{-1}}{\tau^2}=-a^2\left(\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}\right)_j$.(2) $u_0^n=u_J^n=0$, $u_{-1}^n=-u_1^n$及$u_{J+1}^n=-u_{J-1}^n$.若记

$$f_j^{n+2}=u_j^{n+2}+u_j^{n+1}-u_j^n-r^2\delta_x^4(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})-2r^2\delta_x^2(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+2r^2\delta_x^2u_j^n,$$

则式(11)可写成

$$-r^2u_{j-1}^{n+3}+(1-2r^2)u_j^{n+3}-r^2u_{j+1}^{n+3}=f_j^{n+2}(j=1,2,\cdots,J-1).$$

于是用格式(11)每前进一步仅需解如下三对角线型线代数方程组

$$\begin{bmatrix} 1+2r^2 & -r^2 & & \\ -r^2 & 1+2r^2 & -r^2 & \\ & & \ddots & \\ & & & -r^2 \\ & & -r^2 & 1+2r^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^{n+3} \\ u_2^{n+3} \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1^{n+2} \\ f_2^{n+2} \\ \vdots \\ f_{J-1}^{n+2}\end{bmatrix}.$$

显然,它是三对角型线代数方程组,且是严格对角占优的,可用追赶法解之.

2 稳定性分析

引理[5] 实系数三次多项式

$$f(x)=x^3+px^2+qx+R$$

是Von Neumann多项式的充要条件,有(1) $q\leqslant 3$;(2) $|p+R|\leqslant 1+q\leqslant 2+pR-R^2$.现用Fourier分析法研究差分格式的稳定性.首先有

$$e^{-ij\alpha}\delta_x^2e^{ij\alpha}=-4s^2,\qquad e^{-ij\alpha}\delta_x^4e^{ij\alpha}=16s^4,\qquad |\alpha|<\pi,$$

其中$i=\sqrt{-1}$, $s=\sin\frac{\alpha}{2}$.令$u_j^{n+3}=u_j^{n+3}$, $v_j^{n+3}=u_j^{n+2}$和$w_j^{n+3}=u_j^{n+1}$,可将四层差分格式(Ⅰ)或(Ⅱ)写成等价的两层格式.再用Fourier方法,可得增长矩阵为

$$G(\Delta t, j) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A} & -\frac{C}{A} & -\frac{D}{A} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

其特征方程为

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0, \tag{15}$$

或当 $A \neq 0$ 时, 可改写为

$$\lambda^3 + \frac{B}{A}\lambda^2 + \frac{C}{A}\lambda + \frac{D}{A} = 0.$$

对照引理有 $p = B/A$, $q = C/A$, $R = D/A$.

(A) 格式(Ⅰ), 即格式(4). 这时特征方程中的系数为 $A = 1 + 32\beta r^2 s^4$, $B = -1 + 32(\frac{1}{2} - \beta) r^2 s^4$, $C = -1 + 32(\frac{1}{2} - \beta) r^2 s^4$, $D = 1 + 32\beta r^2 s^4$. 对照引理, 有

$$q = \frac{C}{A} = \frac{-1 + 32(\frac{1}{2} - \beta) r^2 s^4}{1 + 32\beta r^2 s^4} \leq$$

$$3 \Leftrightarrow (1 - 8\beta) r^2 s^4 \leq \frac{1}{4}. \tag{16}$$

当(i) $\frac{1}{8} \leq \beta \leq 1$ 时, 式(16) 恒成立; 而当(ii) $0 \leq \beta < \frac{1}{8}$ 时, 且仅当 $r = a\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - 8\beta}}$ 时, 式(16) 成立. 又

$$|p + R| = \left|\frac{-1 + 32(\frac{1}{2} - \beta) r^2 s^4 + 1 + 32\beta r^2 s^4}{1 + 32\beta r^2 s^4}\right| =$$

$$\frac{16 r^2 s^4}{1 + 32\beta r^2 s^4} = 1 + q = 2 + pR - R^2,$$

因而满足引理条件. Von Neumann 条件成立. 因此, 由文[5]我们有如下定理.

定理 1　梁自由振动方程初边值问题(1)～(3) 的四层加权格式(Ⅰ), 当 $\frac{1}{8} \leq \beta \leq 1$ 时, 至少在 Forsythe-Wasow 意义下无条件稳定; 而当 $0 \leq \beta < \frac{1}{8}$ 时, 稳定性条件为 $r = a\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 8\beta}}$.

下面列出四层加权格式的几种特殊情况.

(1) $\beta = 0$ 为 12 点四层显格式, 即

$$\frac{u_j^{n+3} - (u_j^{n+2} + u_j^{n+1}) + u_j^n}{2\tau^2} + \frac{a^2\delta_x^4(u_j^{n+2} + u_j^{n+1})}{2h^4} = 0, \qquad \begin{pmatrix} & & * & & \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & & * & & \end{pmatrix}. \tag{17}$$

其局部截断误差阶为 $O(\tau^2 + h^2)$, 稳定性条件为 $r \leq \frac{1}{2}$.

(2) $\beta = \frac{1}{8}$ 为 20 点四层隐格式, 即

$$\frac{u_j^{n+3}-(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+u_j^n}{2\tau^2}+$$

$$\frac{a^2\delta_x^4(u_j^{n+3}+3u_j^{n+2}+3u_j^{n+1}+u_j^n)}{8h^4}=0,\qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{18}$$

其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2)$, 恒稳.

(3) $\beta=\frac{1}{4}$为 20 点四层隐格式, 即

$$\frac{u_j^{n+3}-(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+u_j^n}{2\tau^2}+$$

$$\frac{a^2\delta_x^4(u_j^{n+3}+u_j^{n+2}+u_j^{n+1}+u_j^n)}{4h^4}=0,\qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{19}$$

其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2)$, 恒稳.

(4) $\beta=\frac{1}{2}$为 12 点四层隐格式, 即

$$\frac{u_j^{n+3}-(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+u_j^n}{2\tau^2}+\frac{a^2\delta_x^4(u_j^{n+3}+u_j^n)}{2h^4}=0,\qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & * & & \\ & & * & & \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{20}$$

其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2)$, 恒稳.

(5) $\beta=1$ 为 20 点四层隐格式, 即

$$\frac{u_j^{n+3}-(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+u_j^n}{2\tau^2}+$$

$$\frac{a^2\delta_x^4(2u_j^{n+3}-u_j^{n+2}-u_j^{n+1}+2u_j^n)}{2h^4}=0,\qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{21}$$

其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2)$, 恒稳.

(6) $\beta=\frac{1}{24}$为 20 点四层隐格式, 即

$$\frac{u_j^{n+3}-(u_j^{n+2}+u_j^{n+1})+u_j^n}{2\tau^2}+$$

$$\frac{a^2\delta_x^4(u_j^{n+3}+11u_j^{n+2}+11u_j^{n+1}+u_j^n)}{24h^4}=0,\qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{22}$$

其局部截断误差阶为 $O(\tau^3+h^2)$, 稳定性条件为 $r\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(B) 格式(Ⅱ), 即式(11). 这时特征方程中的系数为 $A=1+8r^2s^2$, $B=-1-8r^2s^2+16r^2s^4$, $C=-1-8r^2s^2+16r^2s^4$, $D=1+8r^2s^2$. 对照引理, 有

$$q=\frac{C}{A}=\frac{-1-8r^2s^2+16r^2s^4}{1+8r^2s^2}\le 3\Leftrightarrow -4r^2s^2(2-s^2)\le 1,$$

它对任意 $r>0$ 均成立. 由于

$$|p+R|=\left|\frac{-18r^2s^2+16r^2s^4+1+8r^2s^2}{1+8r^2s^2}\right|=\frac{16r^2s^4}{1+8r^2s^2}=1+q=2+pR-R^2,$$

满足引理条件. Von Neumann 条件成立. 因此, 由文[5]有以下定理.

定理 2 　梁自由振动初边值问题(1)～(3)的三对角线型四层隐格式(Ⅱ), 至少在 Forsthe-wasow[6] 意义下无条件稳定.

3　数值试验

考虑如下两端简支梁自由振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=-\dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\partial^4u}{\partial x^4}, & 0\le x\le 1,\quad t\ge 0, & (23)\\ u(x,0)=\sin\pi x, \quad u_t(x,0)=0, & 0\le x\le 1, & (24)\\ u(0,t)=u(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0. & & (25)\end{cases}$$

其精确解为

$$u(x,t)=\sin\pi x\cos\pi t. \tag{26}$$

取 $h=\frac{1}{20}$, $r=a\frac{\tau}{h^2}=400\tau/\pi=\frac{1}{2}, 1, 2$, 即 $\tau=r\pi/400=\frac{\pi}{800}, \frac{\pi}{400}$ 及 $\frac{\pi}{200}$. 按显式格式(17)及隐式格式(11), (18)～(22)进行计算到 $t=2.1049$, 并且与精确解进行比较, 如表 1 所示(定解条件(2), (3)离散化如前所述). 结果表明, 本文所建立的格式是有效的, 理论分析也是正确的.

表 1　$h=0.05$ 和 $\tau=r\pi/400$ 计算到 $t=2.1049$ 的数值结果比较表

r	x	精确解式(26)	隐格式(11)	显格式(17)	隐格式(18)	隐格式(19)	隐格式(20)	隐格式(21)	隐格式(22)
$\frac{1}{2}$	0.1	0.292 75	0.294 45	0.294 06	0.294 07	0.294 07	0.294 07	0.294 07	0.294 06
	0.2	0.556 84	0.560 08	0.559 34	0.559 35	0.559 35	0.559 35	0.559 36	0.559 34
	0.3	0.766 42	0.770 88	0.769 87	0.769 87	0.769 88	0.769 88	0.769 90	0.769 87
	0.4	0.900 98	0.906 23	0.905 04	0.905 04	0.905 04	0.905 05	0.905 07	0.905 04
	0.5	0.947 35	0.952 87	0.951 61	0.951 62	0.951 62	0.951 63	0.951 64	0.951 61
1	0.1	0.293 13	0.295 93		0.294 44	0.294 45	0.294 46	0.294 48	0.294 44
	0.2	0.557 57	0.562 90	上	0.560 06	0.560 07	0.560 09	0.560 13	0.560 06
	0.3	0.767 43	0.774 76		0.770 86	0.770 87	0.770 90	0.770 95	0.770 85
	0.4	0.902 17	0.910 79	溢	0.906 20	0.906 22	0.906 25	0.906 30	0.906 19
	0.5	0.948 60	0.957 66		0.952 84	0.952 85	0.952 88	0.952 95	0.952 83

续表

r	x	精确解式(26)	隐格式(11)	显格式(17)	隐格式(18)	隐格式(19)	隐格式(20)	隐格式(21)	隐格式(22)
	0.1	0.293 89	0.300 43		0.295 17	0.295 18	0.295 22	0.295 29	
	0.2	0.559 02	0.571 45	上	0.561 44	0.561 47	0.561 54	0.561 68	上
2	0.3	0.769 42	0.786 53		0.772 75	0.772 80	0.772 90	0.773 09	
	0.4	0.904 51	0.924 62	溢	0.908 43	0.908 48	0.908 60	0.908 82	溢
	0.5	0.951 06	0.972 21		0.955 18	0.955 24	0.955 35	0.955 59	

参 考 文 献

1 秦元勋. 计算物理学[M]. 成都: 四川科技出版社, 1984. 87～192

2 李荣华, 冯果忱. 微分方程数值解[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980. 374～376

3 Khaliq A Q M, Twizell E H. A family of second order methods for variable coefficient fourth order partial differential equations, in-tern[J]. Computer Math., 1987, 23: 1～7

4 胡承列. 解弹性体振动方程的几个差分格式[J]. 华东师范大学学报, 1991, 2: 29～36

5 马驷良, 徐桢殷. 实系数三、四次多项式是 Von Neumann 多项式的充要条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1984, 6(3): 274～280

6 矢岛信男, 野术达夫. 发展方程の数值解析[M]. 东京: 岩波书店, 1977. 46～232

Two New Classes of Implicit Difference Schemes for Solving Rod Vibration Equation of Four Order

Zeng Wenping

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract Two new classes of four level implicit difference schemes are advanced for solving rod vibration equation of four order $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$, where a is a constant. These schemes are unconditionally stable, with $O(\tau^2 + h^2)$ and $O(\tau^2 h^2 + (\frac{\tau}{h})^2)$ as respective local truncation error. Moreover, a four level explicit difference scheme is obtained under special case, with $r = a\tau/h^2 \leq \frac{1}{2}$ as its stability condition. These schemes are indicated by numerical example to be effective.

Keywords rod vibration equation, implicit difference scheme, unconditionally stable