第24卷　第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.24　No.2
2003年2月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr.2003

文章编号　1000-5013(2003)02-0125-06

四阶杆振动方程的 sinh(*x*) 蛙跳辛格式

黄　浪　扬

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要　利用 Hyperbolic 函数 sinh(x), 构造四阶杆振动方程的任意阶精度的辛格式, 并进行了稳定性分析.

关键词　四阶杆振动方程, Hamilton 方程组, 函数 sinh(x), 辛格式
中图分类号　O 241.82　　　文献标识码　A

1984 年, 冯康用辛几何的观点提出计算 Hamilton 系统的新方法[1~2], 系统地研究了用生成函数构造任意阶精度的辛格式的一般方法. 随后, 秦孟兆等人[3~4] 对波动方程的辛格式进行深入的研究. 对于下列四阶杆振动方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

设其边界条件为周期的. 即在此条件下, 解具有周期性. 在文献[5]中, 已经给出了方程(1)的哈密顿正则方程组, 并利用 Hyperbolic 函数 tanh(x) 构造了具周期边界条件的四阶杆振动方程的具任意阶精度的有限维空间截断的辛格式. 但由于文献[5]中的 tanh(x) 辛格式是两层隐式格式, 需解五对角线型代数方程组, 计算量较大. 因此, 本文研究由 Hyperbolic 函数 sinh(x) 所生成的三层显式辛格式, 进而讨论所构造格式的稳定性.

1　四阶杆振动方程的 sinh(*x*) 蛙跳辛形式

文献[5]中已经改写方程(1)为如下的 Hamilton 方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{H}_z, \tag{2}$$

其中 Hamilton 函数为 $H = \frac{1}{2}\int(v_x^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x$, 且

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{J}' = -\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_z = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta H}{\delta u} \\ \dfrac{\delta H}{\delta v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{xx} \\ -v_{xx} \end{bmatrix}.$$

方程组(2)可改写成为如下形式

收稿日期　2002-09-26　　　作者简介　黄浪扬(1974-), 男, 助教
基金项目　华侨大学科研基金资助项目(01HZR04)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}z, \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{bmatrix},$$

且 Δ 为逼近$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$的中心差分算子.

令 $\Delta(2m)$ 是$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$的 $2m$ 阶中心差分算子($m=1,2,3,\cdots$),则

$$\Delta(2m) = \nabla_+\nabla_-\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\beta_j\left(\frac{\nabla x^2\nabla_+\nabla_-}{4}\right)^j, \tag{4}$$

其中 $\beta_j=\frac{[(j!)^2 2^{2j}]}{[(2j+1)!\cdot(j+1)]}$, ∇_+ 和 ∇_- 分别是向前和向后差分算子.

记 $\boldsymbol{U}=[u_1,u_2,\cdots,u_N]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{V}=[v_1,v_2,\cdots,v_N]^{\mathrm{T}}$, 则方程组(3)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{V}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{M}(2,2m) \\ -\boldsymbol{M}(2,2m) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{V}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{M}(2,2m)\boldsymbol{V}\\ -\boldsymbol{M}(2,2m)\boldsymbol{U}\end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中$M(2,2,m)$是相应于$\Delta(2m)$的$N\times N$矩阵. 在空间方向方程组(5)逼近于方程组(3)具 $O(\Delta x^{2m})$ 阶精度.

实践中, 常用二阶和四阶差分近似. 令 $\Delta(2)$ 和 $\Delta(4)$ 分别是$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$的二阶和四阶中心差分算子. 在这两种情况下, 有

$$\Delta(2)u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \tag{6}$$

$$\Delta(4)u_i^n = \frac{-u_{i+2}^n + 16u_{i+1}^n - 30u_i^n + 16u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{12\Delta x^2}. \tag{7}$$

它们的相应矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}(2,2) = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{M}(2,4) = \frac{1}{12\Delta x^2}\begin{pmatrix} -30 & 16 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 16 \\ 16 & -30 & 16 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 16 & -30 & 16 \\ 16 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 16 & -30 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

在此基础上, 我们用生成函数法来构造方程组(3)的辛格式. 文献[5]中已用 Hyperbolic 函数 $\tanh(x)$ 对下列线性 Hamilton 方程组

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)z, \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{A}(2m)$ 是逼近于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 且具有 $2m$ 阶精度的对称矩阵, 可构造成如下的精度为 $O(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2m})$ 的辛格式. 即

$$\boldsymbol{z}^{n+1}-\boldsymbol{z}^{n}=\tanh\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}\boldsymbol{A}(2m)\right)(\boldsymbol{z}^{n+1}+\boldsymbol{z}^{n}). \tag{11}$$

由于格式(11)是两层隐式格式, 需解五对角线型代数方程组, 计算量较大. 因此, 本文继续研究由函数 $\sinh(x)$ 生成的三层显式辛格式. 利用方程(10)在时间 $t+\Delta t$ 及 t 处具有精确解

$$\boldsymbol{z}(t+\Delta t)=\mathrm{e}^{\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)}\boldsymbol{z}(t).$$

有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(t+\Delta t)-\boldsymbol{z}(t-\Delta t)&=\mathrm{e}^{\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)}\boldsymbol{z}(t)-\mathrm{e}^{-\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)}\boldsymbol{z}(t)=\\&2\sinh(\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m))\boldsymbol{z}(t),\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}\sinh(x)&=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},\end{aligned} \tag{13}$$

格式(12)在时间方向具有任意阶精度. 然而, 若取 $\sinh(x)$ 的 $2s$ 阶截断误差表达式

$$\sinh(2s,\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m))=\sum_{k=1}^{s}\frac{(\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m))^{2k-1}}{(2k-1)!}, \tag{14}$$

则可得精度为 $O(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2m})$ 的蛙跳辛格式为

$$\boldsymbol{z}^{n+1}-\boldsymbol{z}^{n-1}=2\sinh(2s,\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m))\boldsymbol{z}^{n}. \tag{15}$$

为了证明格式(15)是辛格式, 我们首先研究格式

$$\boldsymbol{z}^{n+1}=\Phi_1\boldsymbol{z}^{n}+\Phi_2\boldsymbol{z}^{n-1} \tag{16}$$

的辛条件.

我们有下列两个引理.

引理 1[ ]　若 $f(x)$ 是奇次多项式且 $\boldsymbol{L}$ 是无穷小辛矩阵, 即 $\boldsymbol{L}'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{L}=0$, 则 $f(\boldsymbol{L})$ 也是无穷小辛矩阵.

引理 2[6]　格式(16)是辛的, 当且仅当 Φ_1 是个无穷小辛矩阵, 且 $\Phi_2=I$.

定理 1　格式(15)是精度为 $O(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2m})$ 的辛格式.

证明　由于方程组(3)中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 令 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}$, 则

$$\boldsymbol{L}'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{J}^{-1})'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{A}=0,$$

即矩阵 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)$ 是无穷小辛矩阵. 由引理 1 知, $\sinh(2s,\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m))$ 是无穷小辛矩阵, 于是由引理 2 可得本定理.

当 $s=1$ 时, 格式(15)恰好是蛙跳格式. 为方便起见, 记方程(1)的精度为 $O(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2m})$ 的辛格式(15)为 SLFM$(2s,2m)$. 下面给出两种由函数 $\sinh(x)$ 所生成的辛格式.

(1) 对格式(15), 若只取 $\sinh(x)$ 的首项 x, 便得到通常的二阶精度蛙跳格式

$$\boldsymbol{z}^{n+1}-\boldsymbol{z}^{n-1}=2\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)\boldsymbol{z}^{n}. \tag{17}$$

方程(3)的差分格式为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n+1}\\\boldsymbol{v}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n-1}\\\boldsymbol{v}^{n-1}\end{bmatrix}+2\Delta t\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{M}(2,2m)\\-\boldsymbol{M}(2,2m)&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n}\\\boldsymbol{v}^{n}\end{bmatrix}. \tag{18}$$

由于周期性边界条件, 所以在式(18)中, 若 $\boldsymbol{M}(2,2m)=\boldsymbol{M}(2,2)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$, 记作 SLFM(2,2). 若 $\boldsymbol{M}(2,2m)=\boldsymbol{M}(2,4)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$, 记作 SLFM(2,4).

(2) 对格式(15), 若取到 $\sinh(x)$ 的第2项便得到四阶精度蛙跳格式

$$\boldsymbol{z}^{n+1}-\boldsymbol{z}^{n-1}=2\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)\boldsymbol{z}^n+\frac{\Delta t^3}{3}(\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m))^3\boldsymbol{z}^n. \tag{19}$$

将其应用到方程(3), 则可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n+1}\\ \boldsymbol{v}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n-1}\\ \boldsymbol{v}^{n-1}\end{bmatrix}+2\Delta t\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{M}(2,2m)\\ -\boldsymbol{M}(2,2m) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^n\\ \boldsymbol{v}^n\end{bmatrix}+$$
$$\frac{\Delta t^3}{3}\begin{bmatrix}0 & M(2,2m)\\ -M(2,2m) & 0\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^n\\ \boldsymbol{v}^n\end{bmatrix}. \tag{20}$$

在式(20)中, 若 $\boldsymbol{M}(2,2m)=\boldsymbol{M}(2,2)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^4+\Delta x^2)$, 记作 SLFM(4,2). 若 $\boldsymbol{M}(2,2m)=\boldsymbol{M}(2,4)$, 则格式精度为 $O(\Delta t^4+\Delta x^4)$, 记作 SLFM(4,4).

2 稳定性分析

由方程(4)可知, 矩阵 $\boldsymbol{M}(2,2m)$ 的特征值为

$$\lambda_k(2,2m)=-\frac{1}{4\Delta x^2}\sin^2\frac{k\pi}{2N}\sum_{j=0}^{m-1}\beta_j(\sin^2\frac{k\pi}{2N})^j,\qquad k=1,\cdots,N.$$

又由文献[5]可知, 矩阵

$$\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{M}(2,2m)\\ -\boldsymbol{M}(2,2m) & 0\end{bmatrix}$$

的特征值 $\mu_k(2m)=\pm\mathrm{i}|\lambda_k(2,2m)|$ 全为纯虚数. 于是由文献[4]中的定理7可得

定理2 当 $s\to\infty$ 时, 格式(15)的稳定域将覆盖整个实轴.

由于格式(15)的过渡矩阵的特征方程为

$$f(\eta)=\eta^2-2\mathrm{i}\sin(2s,\mu(2m))\eta-1=0, \tag{21}$$

其中

$$\sin(2s,\mu(2m))=\mu(2m)-\frac{(\mu(2m))^3}{3!}+\cdots+(-1)^s\frac{(\mu(2m))^{2s-1}}{(2s-1)!},$$

且 $\mu(2m)$ 是 $\Delta t\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)$ 的特征值

$$\mu(2m)=\pm\mathrm{i}\Delta t|\lambda_k(2,2m)|.$$

由 Miller 准则[7]可知, 格式(15)稳定的充要条件为

$$|\sin(2s,\mu(2m))|\leq 1.$$

令 $\rho_{2s}=\min\limits_i\mu_i$, 这里 μ_i 是 $\sin(2s,\mu)=\pm1$ 的正根, 且令 $l_{2m}=\max\limits_k(\Delta x^2|\lambda_k(2,2m)|)$. 于是有

定理3 格式(15) (即 SLFM$(2s,2m)$)的稳定性条件为

$$r=\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\leq\frac{\rho_{2s}}{l_{2m}}. \tag{22}$$

按式(22)可得一些常用格式的稳定性条件, 如表1所示. 表中 ρ_{2s} 及 l_{2m} 的数据, 可参见文[4]. 由表1可见, 由函数 $\sinh(x)$ 所生成的蛙跳辛格式在空间方向提高精度会缩小稳定性区域, 而在时间方向提高精度则会扩大稳定性区域.

表 1　辛格式 SLFM (2s, 2m) 稳定性比较表

格式名称	ρ_{2s}	l_{2m}	稳定性条件 $r \le \rho_{2s}/l_{2m}$
SLFM(2, 2)	1	4	0.250 0
SLFM(2, 4)	1	5.333 333 3	0.187 5
SLFM(4, 2)	2.847 321 5	4	0.711 830 3
SLFM(4, 4)	2.847 321 5	5.333 333 3	0.533 872 7

3　数值例子

考虑初边值问题

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \qquad 0 \le x \le 2\pi, \quad t \ge 0, \tag{23}$$

初始条件

$$u(x, 0) = \sin x, \qquad u_t(x, 0) = 0, \qquad 0 \le x \le 2\pi, \tag{24}$$

周期边界条件

$$u(0, t) = u(2\pi, t), \qquad t \ge 0. \tag{25}$$

上述问题的精确解为

$$u(x, t) = \sin x \cos t, \qquad 0 \le x \le 2\pi. \tag{26}$$

用 $u(i, n)$ 表示差分解在 $x = i\Delta x$, $t = n\Delta t$ 时的解. 表 2 是 4 个格式在同一网格比下计算结果的精度比较($\Delta x = 2\pi/40 = 0.157\ 079\ 6$, $\Delta t = 0.004\ 614\ 03$, $r = \Delta t/(\Delta x)^2 = 0.187\ 0$) . 精度符合要求, 在内点处以 SLFM(2, 4) 和 SLFM(4, 4) 为最高, 注意到 $\Delta t = O(\Delta x^2)$. 这是合理的, 结果令人满意. 表 3, 4 给出格式 SLFM(2, 4) 和 SLFM(4, 4) 在临界值的稳定情况. 当 $r = 0.187\ 0$ 时, 格式SLFM(2, 4) 稳定; 当$r = 0.188\ 0$时, 则不稳定. 当$r = 0.533\ 8$时, 格式SLFM(4, 4) 稳

表 2　格式精度比较表

格式名称	SLFM(2, 2)	SLFM(2, 4)	SLFM(4, 2)	SLFM(4, 4)	精确解
$u(1, 500)$	−0.107 350 6	−0.107 886 2	−0.107 349 7	−0.107 885 2	−0.105 044 9
$u(2, 500)$	−0.208 624 2	−0.209 696 7	−0.208 622 3	−0.209 694 8	−0.207 503 2
$u(3, 500)$	−0.304 760 7	−0.306 343 8	−0.304 758 0	−0.306 341 1	−0.304 852 1
$u(4, 500)$	−0.393 393 0	−0.395 447 7	−0.393 389 5	−0.395 444 2	−0.394 694 5
$u(5, 500)$	−0.472 338 7	−0.474 814 4	−0.472 334 4	−0.474 810 1	−0.474 818 3
$u(6, 500)$	−0.539 653 9	−0.542 489 6	−0.539 649 0	−0.542 484 7	−0.543 250 4
$u(7, 500)$	−0.593 680 9	−0.596 806 9	−0.593 675 5	−0.596 801 4	−0.598 305 9
$u(8, 500)$	−0.633 089 6	−0.636 428 8	−0.633 083 8	−0.636 423 0	−0.638 629 2
$u(9, 500)$	−0.656 909 5	−0.660 379 7	−0.656 903 5	−0.660 373 7	−0.663 227 2
$u(10, 500)$	−0.664 554 1	−0.668 069 9	−0.664 548 1	−0.668 063 8	−0.671 494 4

表 3　格式 SLFM (2, 4) 且 $\Delta x = 0.157\ 079\ 6$

r 值	函数值	$u(1, 200)$	$u(1, 700)$	$u(10, 200)$	$u(10, 700)$
0.187 0	计算值	$9.136\ 4\times10^{-2}$	$-1.554\ 9\times10^{-1}$	$6.072\ 6\times10^{-1}$	$-9.965\ 2\times10^{-1}$
	精确值	$9.442\ 1\times10^{-2}$	$-1.558\ 3\times10^{-1}$	$6.035\ 8\times10^{-1}$	$-9.961\ 1\times10^{-1}$
0.188 0	计算值	$9.071\ 9\times10^{-2}$	$1.184\ 1\times10^{6}$	$6.033\ 6\times10^{-1}$	$-1.184\ 1\times10^{6}$
	精确值	$9.380\ 5\times10^{-2}$	$-1.555\ 6\times10^{-1}$	$5.996\ 4\times10^{-1}$	$-9.944\ 4\times10^{-1}$

表4 格式SLFM(4, 4)且 $\Delta x = 0.1570796$

r 值	函数值	$u(1,200)$	$u(1,700)$	$u(10,200)$	$u(10,700)$
0.5338	计算值	-1.4204×10^{-1}	-1.5538×10^{-1}	-8.6760×10^{-1}	-9.7635×10^{-1}
	精确值	-1.3673×10^{-1}	-1.5316×10^{-1}	-8.7401×10^{-1}	-9.7904×10^{-1}
0.5340	计算值	-1.4211×10^{-1}	3.9700×10^{3}	-8.6809×10^{-1}	-3.9711×10^{3}
	精确值	-1.3680×10^{-1}	-1.5327×10^{-1}	-8.7449×10^{-1}	-9.7974×10^{-1}

定; 当 $r=0.5340$ 时, 则不稳定. 计算结果符合蛙跳格式的稳定性条件. 所有4个格式的稳定性在临界值附近都很敏感, 不一一列举. 计算结果与理论分析相符合.

参 考 文 献

1 Feng Kang, Qin Mengzhao. The symplectic methods for the computation of Hamiltonian equations[A]. In: Zhu Youlan, eds. Proc. of 1st Chinese Cong. On Numerical Methods of PDE's[C]. Berlin: Springer, 1987. 1～37

2 Feng Kang. On difference schemes and symplectic geometry[A]. In: Feng K, eds. Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Computation of Partial Differential Equations[C]. Beijing: Science Press, 1985. 42～58

3 秦孟兆. 波动方程两种哈密顿型蛙跳格式[J]. 计算数学, 1988, 10(3): 272～281

4 Qin Mengzhao, Zhu Wenjie. Construction of symplectic schemes for wave equations via hyperbolic functions sinh(x), cosh(x), tanh(x)[J]. Comput. Math. Appl., 1993, 26(8): 1～11

5 黄浪扬. 四阶杆振动方程的tanh(x)辛算法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2002, 23(3): 217～221

6 Ge Zhong, Feng Kang. On the approximation of linear Hamiltonian systems[J]. J. Comput. Math., 1988, 6(1): 88～97

7 Miller J H. On the location of zeros of certain class of polynomials with application to numerical analysis[J]. J. Inst. Math. Appl., 1971, 8(4): 397～409

Leap-Frog Symplectic Scheme Constructed via Function sinh(x) for the Rod Vibration Equation of Four Order

Huang Langyang

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract By using hyperbolic function sinh(x), the author constructs symplectic schemes with precision of arbitrary order for the rod vibration equation of four order; and analyses their stability.

Keywords rod vibration equation of four order, Hamiltonian equations, function sinh(x), symplectic scheme