第 24 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.24　No.2
2003 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr.2003

文章编号　1000-5013(2003)02-0119-06

一类具有时滞的微分系统的周期解

方聪娜　　王全义

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要　研究一类具有分布滞量的高维周期微分系统周期解的存在性和唯一性. 利用不动点方法, 得到该类系统周期解的存在性和唯一性的一些新结果.

关键词　微分系统, 周期解, 存在性, 唯一性

中图分类号　O 175.1　　文献标识码　A

众所周知, 微分系统的周期解理论具有非常重要的理论意义和实际意义. 文[1～4]研究了周期微分系统

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t-r(t))),\tag{1}$$

得到了一些保证系统(1)的周期解存在的充分性条件. 最近, 文[5]又研究了具有分布滞量的微分系统

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\int_{-r}^{0}\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{x}(t+s))\mathrm{d}s\tag{2}$$

的周期解的存在性和全局吸引性问题. 本文将研究比系统(2)更为广泛的一类具有时滞的周期微分系统, 即

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}(t)+\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{x}(t+s))\mathrm{d}s.\tag{3}$$

式(3)的$(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})$是$n\times n$连续函数矩阵, $(t,s,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times(-\infty,0]\times\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{x})$是$n$维连续函数向量. $\int_{-\infty}^{0}\|\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{x})\|\mathrm{d}s$关于$(t,\boldsymbol{x})\in R_1\times D_1$一致收敛, 其中$R_1, D_1$分别为$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$中的任一紧集. 对$\forall(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}(t+T,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})$, $\forall(t,s,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times(-\infty,0]\times\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}(t+T,s,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{x})$, $T>0$为常数. 利用不动点方法, 得到了系统(3) T-周期解的存在性和唯一性的一些新结果.

1　一些引理

在本文中, 我们恒设$\boldsymbol{P}$为n阶正定对称常数方阵, 并以r_M, r_m分别表示$\boldsymbol{P}$的最大和最小的特征根.

收稿日期　2002-11-24　　作者简介　方聪娜(1977-), 女, 硕士研究生

基金项目　国务院侨务办公室科研基金资助项目(01A2R02)

定义 1　设 $g(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上连续的 T-周期函数, 则 $g^{+}(t)=\frac{1}{2}[g(t)+|g(t)|]=\max(g(t),0)\geq 0$, $g^{-}(t)=\frac{1}{2}[g(t)-|g(t)|]=\min(g(t),0)\leq 0$ 都是 $\mathbf{R}$ 上连续的 T-周期函数且 $g(t)=g^{+}(t)+g^{-}(t)$. 现对 n 阶正定对称常数方阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $g(t)$ 定义如下函数.

定义 2　$L[t,-g,\boldsymbol{P}]=-[\frac{g^{+}(t)}{r_M}+\frac{g^{-}(t)}{r_m}]$, 可见 $L[t,-g,\boldsymbol{P}]$ 是 $\mathbf{R}$ 上连续的 T-周期函数.

易知对称方阵 $\frac{\boldsymbol{PA}(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}^{*}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}}{2}$ 的 n 个特征根 $\lambda_j(t,\boldsymbol{x})(j=1,2,\cdots,n)$ 也是 t 的连续 T-周期函数, 这里 $\boldsymbol{A}^{*}(t,\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})$ 的转置. 记

$$\lambda_m(t,\boldsymbol{x})=\lambda_{\min}[\boldsymbol{PA}(t,\boldsymbol{x})]=\min\{\lambda_j(t,\boldsymbol{x})\,|\,j=1,2,\cdots,n\},$$

于是 $\lambda_m(t,\boldsymbol{x})$ 是 t 的连续 T-周期函数.

引理 1[3]　设 $f(t),g(t)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上连续的 T-周期函数, 如果 $\forall t\in\mathbf{R}$, $f(t)\leq g(t)$, 则有(i) $f^{+}(t)\leq g^{+}(t)$, $f^{-}(t)\leq g^{-}(t)$, (ii) $L[t,-f,\boldsymbol{P}]\geq L[t,-g,\boldsymbol{P}]$. 特别地, 若存在 $\mathbf{R}$ 上连续的 T-周期函数 $a(t)$, 使对 $\forall(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 有 $\lambda_{\min}[\boldsymbol{PA}(t,\boldsymbol{x})]\geq a(t)$. 那么, 由引理 1 即知必有

$$\lambda^{+}_{\min}[\boldsymbol{PA}(t,\boldsymbol{x})]\geq a^{+}(t),\qquad \lambda^{-}_{\min}[\boldsymbol{PA}(t,\boldsymbol{x})]\geq a^{-}(t),$$

$$L[t,-\lambda_{\min}[\boldsymbol{PA}(t,\boldsymbol{x})],\boldsymbol{P}]\leq L[t,-a,\boldsymbol{P}].$$

考虑如下周期系统

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

和

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t). \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上 $n\times n$ 连续函数矩阵, 而 $\boldsymbol{f}(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上 n 维连续函数向量, 且 $\boldsymbol{A}(t+T)=\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{f}(t+T)=\boldsymbol{f}(t)$, 记 $[\boldsymbol{PA}(t)+\boldsymbol{A}^{*}(t)\boldsymbol{P}]/2$ 的 n 个特征根 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)$ 的最小特征根为 $\lambda_m(t)$.

引理 2[]　设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是式(4)的基本解矩阵, 则有

$$\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\|\leq\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\cdot\exp\left(\int_t^s L[\tau,-\lambda_m,\boldsymbol{P}]\,\mathrm{d}\tau\right),\qquad t\leq s.$$

引理 3[]　设 $a(t)$ 是连续的 T-周期函数, 则

$$\int_t^{t+T}a(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^T a(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

引理 4[]　对于系统(5), 若 $\lambda_m(t)$ 满足 $k=\exp\left(\int_0^T L[\tau,-\lambda_m,\boldsymbol{P}]\,\mathrm{d}\tau\right)<1$, 则系统(5)存在唯一的 T-周期解 $\boldsymbol{x}(t)=-\int_t^{+\infty}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s$.

记 $\boldsymbol{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)=\{\boldsymbol{f}(t)\,|\,\boldsymbol{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 为 n 维连续函数向量$\}$, $B=\{\boldsymbol{V}\,|\,\boldsymbol{V}(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ 且 $\boldsymbol{V}(t+T)=\boldsymbol{V}(t)\}$, 则 B 在范数 $\|\boldsymbol{V}\|=\sup\limits_{0\leq t\leq T}\{\|\boldsymbol{V}(t)\|\}$ 下是一个 Banach 空间.

2　主要结果

定理 1　如果存在 n 阶正定对称常数方阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $\mathbf{R}$ 上连续的 T-周期函数 $a_1(t)$, 并使得(i) 对 $\forall(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, $\lambda_{\min}[\boldsymbol{PA}(t,\boldsymbol{x})]\geq a_1(t)$ 且 $k_1=\exp\left(\int_0^T L[\tau,-a_1,\boldsymbol{P}]\,\mathrm{d}\tau\right)<1$; (ii) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}$ ·

$\int_0^T\int_{-\infty}^0 \sup_{\|x\|\le n}\|f(t,s,x)\|\,ds\,dt<\sqrt{\frac{r_m}{r_M}}\cdot\frac{1-k_1}{M_1}$. 在上式中 $M_1=\sup\{\exp(\int_s^t L[\tau,-a_1,P]\,d\tau),\ 0\le s\le t\le T\}$, 则系统(3)至少存在一个 T-周期解. 考虑拟线性方程

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^0 f(t,s,x(t+s))\,ds, \tag{6}$$

其中 $A(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 $n\times n$ 连续函数矩阵, $A(t+T)=A(t)$, f 的定义同前. 记 $[PA(t)+A^*(t)\cdot P]/2$ 的最小特征根为 $\lambda_m(t)$.

定理 **2**　如果存在 n 阶正定对称常数方阵 P 及连续函数 $h(t,s)\ge 0$, $(t,s)\in\mathbf{R}\times(-\infty,0]$, $h(t+T,s)=h(t,s)$, $\int_{-\infty}^0 h(t,s)\,ds$ 关于 $t\in[0,T]$ 一致收敛. 同时有(i) $\exp(\int_0^T L[\tau,-\lambda_m,P]\,d\tau)=k<1$; (ii) $\|f(t,s,x)-f(t,s,y)\|\le h(t,s)\|x-y\|$, $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$; (iii) $\sup_{0\le s\le t\le T}\{\exp(\int_s^t L[\tau,-\lambda_m,P]\,d\tau)\}=M<\sqrt{\frac{r_m}{r_M}}\cdot\frac{1-k}{\beta_1}$, 其中 $\beta_1=\int_0^T\int_{-\infty}^0 h(t,s)\,ds\,dt$. 那么, 方程(6)就存在唯一的 T-周期解.

3　定理的证明

(Ⅰ) 定理 1 的证明. 对任意的 $V\in B$, 考虑如下周期系统

$$x'(t)=A(t,V(t))x(t)+\int_{-\infty}^0 f(t,s,V(t+s))\,ds. \tag{7}$$

由 $f(t,s,x)$ 的连续性且关于 t 的周期性及无穷积分 $\int_{-\infty}^0\|f(t,s,x)\|\,ds$ 关于 $(t,x)\in R_1\times D_1$ (其中 R_1, D_1 分别为 $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ 中的任一紧集) 的一致收敛性, 易知 $\int_{-\infty}^0 f(t,s,V(t+s))\,ds$ 是连续的 T-周期函数向量. 又由条件(i) 及引理 1, 4 可知, 系统(7) 有唯一的 T-周期解, 即

$$x_V(t)=-\int_t^{\infty}X_V(t)X_V^{-1}(s)\left(\int_{-\infty}^0 f(s,\tau,V(s+\tau))\,d\tau\right)ds,$$

其中 $X_V(t)$ 是方程 $x'(t)=A(t,V(t))x(t)$ 的基本解矩阵. 现在定义算子 $F: B\to B$ 为

$$FV(t)=x_V(t),\ \forall\ V\in B.$$

易见算子 F 的不动点就是方程(3)的 T-周期解. 为了利用 Schauder 不动点定理, 我们需证在 B 中存在一个闭球 B_{n_0} 使得 $F: B_{n_0}\to B_{n_0}$ 是一个全连续算子. 下面证明这一点. 记 $B_n=\{V\,|\,V\in B$ 且 $\|V\|\le n\}$, 其中 n 为自然数.

(a) 先证存在自然数 N, 使得 $F: B_N\to B_N$. 用反证法, 若不然, 对任意的自然数 n, 都存在 $V_n\in B_n$ 使得 $\|FV_n\|>n$. 于是由条件(i) 及引理 1, 2, 3 有

$$\frac{\|FV_n(t)\|}{n}\le\frac1n\int_t^{\infty}\|X_{V_n}(t)X_{V_n}^{-1}(s)\|\left(\int_{-\infty}^0\|f(s,\tau,V_n(s+\tau))\|\,d\tau\right)ds\le$$

$$\frac1n\int_t^{\infty}\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\exp\left(\int_t^s L[\tau,-a_1,P]\,d\tau\right)\cdot$$

$$\left(\int_{-\infty}^0\|f(s,\tau,V_n(s+\tau))\|\,d\tau\right)ds=\frac1n\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{t+mT}^{t+(m+1)T}\exp\left(\int_t^s L[\tau,-a_1,\boldsymbol{P}]\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(s,\tau,\boldsymbol{V}_n(s+\tau))\|\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{n}\ \frac{\overline{r_M}}{r_m}\cdot\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{t+mT}^{t+(m+1)T}\exp\left(\int_{t+mT}^{s}L[\tau,-a_1,\boldsymbol{P}]\mathrm{d}\tau+\right.$$

$$\left.\int_t^{t+mT}L[\tau,-a_1,\boldsymbol{P}]\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(s,\tau,\boldsymbol{V}_n(s+\tau))\|\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{n}\ \frac{\overline{r_M}}{r_m}\cdot\sum_{m=0}^{+\infty}k_1^m\int_{t+mT}^{t+(m+1)T}\exp\left(\int_{t+mT}^{s}L[\tau,-a_1,\boldsymbol{P}]\mathrm{d}\tau\right)\cdot$$

$$\left(\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(s,\tau,\boldsymbol{V}_n(s+\tau))\|\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leq$$

$$\frac{1}{n}\ \frac{\overline{r_M}}{r_m}\cdot\frac{M_1}{1-k_1}\cdot\int_0^T\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(s,\tau,\boldsymbol{V}_n(s+\tau))\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

从而由条件(ii),可得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\|F\boldsymbol{V}_n\|}{n}\leq\frac{\overline{r_M}}{r_m}\cdot\frac{M_1}{1-k_1}\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\int_0^T\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(s,\tau,\boldsymbol{V}_n(s+\tau))\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s<$$

$$\frac{\overline{r_M}}{r_m}\cdot\frac{M_1}{1-k_1}\ \frac{\overline{r_m}}{r_M}\cdot\frac{1-k_1}{M_1}=1.$$

这与$\dfrac{\|F\boldsymbol{V}_n\|}{n}>1$相矛盾. 因此存在着自然数$N$使得$F:B_N\to B_N$.

(b) 证明FB_N在B中为相对紧子集. 事实上, 因为$FB_N\subseteq B_N$,所以$\{F\boldsymbol{V}(t)|\boldsymbol{V}\in B_N\}$是一致有界的. 记

$$b_0=\sup\left\{\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{x})\|\mathrm{d}s\,\middle|\,(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times R_N\right\},$$

$$b_1=\sup\{\|\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\|\,|\,(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times R_N\},$$

其中$R_N=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{x}\|\leq N\}$. 又因为$\forall\,\boldsymbol{V}\in B_N$,有

$$\frac{\mathrm{d}F\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_V(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{V}(t))F\boldsymbol{V}(t)+\int_{-\infty}^0\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{V}(t+s))\mathrm{d}s,$$

所以$\left\|\dfrac{\mathrm{d}F\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}\right\|\leq b_1N+b_0$. 故$\{F\boldsymbol{V}(t)|\boldsymbol{V}\in B_N\}$是等度连续的, 由Ascoli-Arzela定理知FB_N是空间B中的一个相对紧子集.

(c) 证明F是B_N上的连续算子. 对$\forall\,\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\in B_N$, 记$\boldsymbol{u}=F\boldsymbol{V}_1-F\boldsymbol{V}_2$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=&\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{V}_1(t))F\boldsymbol{V}_1(t)+\int_{-\infty}^0\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{V}_1(t+s))\mathrm{d}s-\\&\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{V}_2(t))F\boldsymbol{V}_2(t)-\int_{-\infty}^0\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{V}_2(t+s))\mathrm{d}s=\\&\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{V}_1(t))\boldsymbol{u}+[\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{V}_1(t))-\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{V}_2(t))]F\boldsymbol{V}_2(t)+\\&\int_{-\infty}^0[\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{V}_1(t+s))-\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{V}_2(t+s))]\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{8}$$

对$\forall\,\varepsilon>0$, 由$\int_{-\infty}^0\|\boldsymbol{f}(t,s,\boldsymbol{x})\|\mathrm{d}s$关于$(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times R_N$的一致收敛性可知, 存在$T_1<0$, 使得对$\forall\,t\in[0,T]$, 有

$$\int_{-\infty}^{T_1}\|f(t,s,V_1(t+s))\|\,\mathrm{d}s<\frac{\epsilon}{4},$$

$$\int_{-\infty}^{T_1}\|f(t,s,V_2(t+s))\|\,\mathrm{d}s<\frac{\epsilon}{4}.$$

又由 $A(t,x)$，$f(t,s,x)$ 分别在有界闭集 $[0,T]\times R^N$，$[0,T]\times[T_1,0]\times R^N$ 上的连续性可知，存在 $\delta>0$ 使得当 $\|V_1-V_2\|<\delta$ 时，有

$$\|A(t,V_1(t))-A(t,V_2(t))\|<\frac{\epsilon}{4N},$$

$$\|f(t,s,V_1(t+s))-f(t,s,V_2(t+s))\|<\frac{\epsilon}{-4T_1},\qquad s\in[T_1,0].$$

所以当 $\|V_1-V_2\|<\delta$ 时，有 $\|[A(t,V_1(t))-A(t,V_2(t))]FV_2(t)+\int_{-\infty}^{0}[f(t,s,V_1(t+s))-f(t,s,V_2(t+s))]\mathrm{d}s\|\le\|A(t,V_1(t))-A(t,V_2(t))\|\cdot\|FV_2(t)\|+\int_{-\infty}^{T_1}\|f(t,s,V_1(t+s))\|\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{T_1}\|f(t,s,V_2(t+s))\|\mathrm{d}s+\int_{T_1}^{0}\|f(t,s,V_1(t+s))-f(t,s,V_2(t+s))\|\mathrm{d}s<\frac{\epsilon}{4N}\cdot N+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{-4T_1}\cdot(-T_1)=\epsilon$. 即当 $\|V_1-V_1\|\to0$ 时，有

$$\|[A(t,V_1(t))-A(t,V_2(t))]FV_2(t)+\int_{-\infty}^{0}[f(t,s,V_1(t+s))-f(t,s,V_2(t+s))]\mathrm{d}s\|\to0.\tag{9}$$

由于 $u=FV_1-FV_2$ 是系统(8)的 T-周期解，且由前面部分(a)的证明，可知

$$\|u\|\le\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\cdot\frac{M_1}{1-k_1}\cdot\int_0^T\|[A(t,V_1(t))-A(t,V_2(t))]FV_2(t)+\int_{-\infty}^{0}[f(t,s,V_1(t+s))-f(t,s,V_2(t+s))]\mathrm{d}s\|\,\mathrm{d}t.$$

故由式(9)可知，当 $\|V_1-V_2\|\to0$ 时，$\|u\|=\|FV_1-FV_2\|\to0$. 即 F 是 B_N 上的连续算子.

综上述可知，$F:B_N\to B_N$ 为全连续算子，故由 Schauder 不动点定理知 F 在 B_N 内至少存在一个不动点，即系统(3)至少存在一个 T-周期解. 证毕.

(Ⅱ) 定理 2 的证明. 任取 $V\in B$，考虑下列方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+\int_{-\infty}^{0}f(t,s,V(t+s))\mathrm{d}s,\tag{10}$$

由定理 1 的证明，可知 $\int_{-\infty}^{0}f(t,s,V(t+s))\mathrm{d}s$ 是连续的 T-周期函数向量. 又由条件(i)及引理 4 可知，方程(10)有唯一的 T-周期解

$$x_V(t)=-\int_t^{+\infty}X(t)X^{-1}(s)\left(\int_{-\infty}^{0}f(s,\tau,V(s+\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $X(t)$ 是下列方程

$$x'(t)=A(t)x(t)$$

的基本解矩阵.

现在定义算子 $F:B\to B$ 为

$$FV(t)=x_V(t),\qquad\forall V\in B.$$

下面证明F是B上的压缩映射. 事实上, 对$\forall V_1, V_2 \in B$. 由条件(i), (ii)有

$$\| FV_1(t) - FV_2(t) \| =$$

$$\left\| \int_t^{+\infty} X(t) X^{-1}(s) \left(\int_{-\infty}^{0} (f(s, \tau, V_1(s+\tau)) - f(s, \tau, V_2(s+\tau))) d\tau \right) ds \right\| \leq$$

$$\int_t^{+\infty} \| X(t) X^{-1}(s) \| \left(\int_{-\infty}^{0} h(s,\tau) \| V_1(s+\tau) - V_2(s+\tau) \| d\tau \right) ds \leq$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{t+nT}^{t+(n+1)T} \overline{\frac{r_M}{r_m}} \exp\left(\int_{t+nT}^{s} L[\tau, -\lambda_m, P] d\tau + \int_t^{t+nT} L[\tau, -\lambda_m, P] d\tau \right) \cdot$$

$$\left(\int_{-\infty}^{0} h(s,\tau) \| V_1(s+\tau) - V_2(s+\tau) \| d\tau \right) ds \leq$$

$$\overline{\frac{r_M}{r_m}} \cdot \frac{M}{1-k} \int_0^T \int_{-\infty}^{0} h(s,\tau) \| V_1(s+\tau) - V_2(s+\tau) \| d\tau ds \leq$$

$$\overline{\frac{r_M}{r_m}} \cdot \frac{M}{1-k} \int_0^T \int_{-\infty}^{0} h(s,\tau) d\tau ds \cdot \| V_1 - V_2 \|.$$

从而, $\| FV_1 - FV_2 \| \leq \overline{\frac{r_M}{r_m}} \cdot \frac{M}{1-k} \int_0^T \int_{-\infty}^{0} h(s,\tau) d\tau ds \cdot \| V_1 - V_2 \|$. 于是, 由条件(iii) 即知$F$是$B$上的压缩映射. 利用压缩映射原理知, F在B中存在唯一的不动点, 即方程(6)存在唯一的T-周期解. 证毕.

参 考 文 献

1 王全义. 周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]. 数学年刊, 1994, 15A(5): 537～545

2 王 克. 一类具偏差变元的微分方程的周期解[J]. 数学学报, 1994, 37(3): 409～413

3 曹进德, 李永昆. 具时滞的高维周期系统周期解的存在性与唯一性[J]. 数学学报, 1997, 40(2): 280～286

4 曹进德, 李 琼. 一类高维时滞微分方程的周期解[J]. 数学研究与评论, 1999, 19(2): 401～408

5 彭世国, 谢湘生. 具有分布滞量的微分系统的周期解和全局吸引性[J]. 数学物理学报, 2001, 21A(4): 466～471

Periodic Solution to a Class of Differential Systems with Time-Delay

Fang Congna Wang Quanyi

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract A study is made on the existence and the uniqueness of periodic solution to a class of higher dimensional periodic differential systems with distributed delay. Some new results are obtained on the existence and the uniqueness of periodic solution to this class of systems by using fixed point method.

Keywords differential systems, periodic solution, existence, uniqueness