文章编号 1000-5013(2003)01-0109-04

Radon 不等式的指数推广

吴 善 和

(龙岩学院数学系, 福建 龙岩 364012)

摘要 利用 Hölder 不等式、Young 不等式和幂平均不等式, 建立 Radon 不等式的指数推广形式.

关键词 Radon 不等式, 指数, 推广形式
中图分类号 O 178　　文献标识码 A

1 主要结果

设 $a_i > 0, b_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $p > 1$ 或 $p < 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{p-1}. \tag{1}$$

上述不等式, 称之为 Radon 不等式[1]. Radon 不等式, 这是一个著名的代数不等式, 它在分式不等式的证明中有着重要的应用. 由于 Radon 不等式中有分子、分母幂指数相差 1 的限制, 因而这就在很大程度上影响了该不等式的应用范围. 1993 年, 文[2]给出 Radon 不等式的一个改进结果. 2001 年, 杨克昌在所撰的文[3]中指出, 文[2]给出的证明是错误的, 他举出反例否定不等式(2), 并对其作了修正. 2002 年, 文[4]推广了 Radon 不等式. 即设 $a_i > 0, b_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $p \geq 1$ 或 $p > 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{b_i^p} \geq n^{1+q-p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^q. \tag{2}$$

我们发现, 上述结论也是错误的. 例如, 取 $n = 2, p = q = 1, a_1 = 5, b_1 = 3, a_2 = 3, b_2 = 2$ 代入式(2)计算可知, 不等式(2)不成立. 现给出我们研究 Radon 不等式的推广中, 得到的一个重要结果.

定理 设 $a_i > 0, b_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则有以下两种情况.

(i) 当 $rs > 0$, $r - s \geq 1$ (或 $r \leq 0, s > 0$) 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{b_i^s} \geq n^{1+s-r} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s. \tag{3}$$

对于 $rs > 0, r - s = 1$, 式(3)中等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时成立; 对于 $rs > 0$, $r - s > 1$(或 r

收稿日期 2002-10-17　　作者简介 吴善和(1966-), 男, 高级讲师
基金项目 龙岩学院自然科学基金资助项目(2002ZR11)

$\leq 0, s > 0)$，式(3)中等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 且 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时成立.

(ii) 当 $rs > 0, r - s < 1, n > 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{b_i^s} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r / \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s. \tag{4}$$

2 几个引理

引理 1　设 $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p \leq n^{1-p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^p, \qquad 0 < p < 1, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p < \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^p, \qquad p > 1, \quad n > 1. \tag{6}$$

证明　式(5)为著名的幂平均不等式[5]. 当 $0 < p < 1$ 时，该不等式中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立. 式(5)由直接展开可得.

引理 2[6]　Young 不等式. 设 $a > 0, b > 0, p > 0, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$，等号当且仅当 $b = a^{p-1}$ 时成立.

引理 3[7]　Hölder 不等式. 设 $x_i > 0, y_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n) p > 0, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则 $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$，等号当且仅当 $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \cdots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$ 时成立.

3 定理证明

因为 $$\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s \sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}}\right]^{\frac{1}{r}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{s}{r}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^r b_i^{-s} \cdot b_i^s\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{s}{r}}} =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)^{\frac{s}{r}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}}\right)^{\frac{1}{s+1}}\left(\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)^{\frac{s}{s+1}}\right]^{\frac{s+1}{r}},$$ 所以有如下 6 种情况.

(1) 若 $r > 0, s > 0, r - s \geq 1$，则 $0 < \frac{s+1}{r} \leq 1$. 分别运用引理 1, 2, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}}\right)^{\frac{1}{s+1}}\left(\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)^{\frac{s}{s+1}}\right]^{\frac{s+1}{r}} \leq n^{1-\frac{s+1}{r}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}}\right)^{\frac{1}{s+1}}\left(\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)^{\frac{s}{s+1}}\right]^{\frac{s+1}{r}} \leq$$
$$n^{1-\frac{s+1}{r}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{s+1} \cdot \frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}} + \frac{s}{s+1} \cdot \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)\right]^{\frac{s+1}{r}} = n^{1-\frac{s+1}{r}}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s+1}\right)^{\frac{s+1}{r}} = n^{1-\frac{s+1}{r}},$$

所以 $\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s \sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^{-s}}\right]^{\frac{1}{r}} \leq n^{1-\frac{s+1}{r}}$，因此 $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{b_i^s} \geq n^{1+s-r} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s}$.

(2) 若 $r < 0, s < 0, r - s \geq 1$，则 $-r > 0, -s > 0, -s - (-r) \geq 1$. 利用(1)中已证的结论，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{b_i^s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{-s}}{a_i^{-r}}\geq n^{1+(-r)-(-s)}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{-r}}=n^{1+s-r}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{s}}.$$

(3) 若 $r=0, s>0$, 则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{b_i^s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i^s}\geq n(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\frac{-s}{n}}$(平均值不等式), $n^{1+s-r}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s}=n^{1+s}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s}\leq n(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\frac{-s}{n}}$, 所以式(3)成立.

(4) 若 $r<0, s>0$, 则 $-r>0, s>0$, 利用(1)中已经证得的结论, 得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{b_i^s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{-r}b_i^s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1^{1+s-r}}{\left(a_i^{\frac{-r}{s-r}}b_i^{\frac{s}{s-r}}\right)^{s-r}}\geq\frac{n^{1+s-r}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{-r}{s-r}}b_i^{\frac{s}{s-r}}\right)^{s-r}}$. 运用引理3, 得 $\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{-r}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{s}\right]^{\frac{1}{s-r}}=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\frac{-r}{s-r}}\right)^{\frac{s-r}{-r}}\right]^{\frac{-r}{s-r}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_i^{\frac{s}{s-r}}\right)^{\frac{s-r}{s}}\right]^{\frac{s}{s-r}}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{-r}{s-r}}b_i^{\frac{s}{s-r}}$, 即 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{-r}{s-r}}b_i^{\frac{s}{s-r}}\right)^{s-r}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{-r}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{s}$. 所以, $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{b_i^s}\geq\frac{n^{1+s-r}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{-r}{s-r}}b_i^{\frac{s}{s-r}}\right)^{s-r}}$

$\geq n^{1+s-r}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{s}}$.

综合(1)～(4)可知, 定理中不等式(3)成立, 其等号成立的条件可由上述证明过程得知.

(5) 若 $r>0, s>0, r-s<1, n>1$, 则 $\frac{s+1}{r}>1$, 分别运用引理1, 2, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n}a_i^r b_i^{-s}}\right)^{\frac{1}{s+1}}\left(\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n}b_i}\right)^{\frac{s}{s+1}}\right]^{\frac{s+1}{r}}<\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n}a_i^r b_i^{-s}}\right)^{\frac{1}{s+1}}\left(\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n}b_i}\right)^{\frac{s}{s+1}}\right]^{\frac{s+1}{r}}\leq$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{s+1}\cdot\frac{a_i^r b_i^{-s}}{\sum_{i=1}^{n}a_i^r b_i^{-s}}+\frac{s}{s+1}\cdot\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n}b_i}\right)\right]^{\frac{s+1}{r}}=\left(\frac{1}{s+1}+\frac{s}{s+1}\right)^{\frac{s+1}{r}}=1.$$

所以, $\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{s}\sum_{i=1}^{n}a_i^r b_i^{-s}}\right]<1$, 因此 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{b_i^s}>\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{s}}$.

(6) 若 $r<0, s<0, r-s<1, n>1$ 则 $-r>0, -s>0, -s-(-r)<1$. 利用(5)中已证的结论, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{b_i^s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{-s}}{a_i^{-r}}>\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{-r}}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{s}}.$$

综合(5), (6), 定理中不等式(4)得证.

4　定理的应用

在定理的不等式(3)中, 令 $r=p, s=p-1$, 即得 Radon 不等式, 故本文定理推广了 Radon 不等式. 由于推广后的不等式减弱了对分子、分母中幂指数要求的条件, 因此大大提高了它的应用价值. 在不等式(3)中, 令 $r=p, s=1$, 得

推论 1　设 $a_i>0, b_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $p\geq2$ 或 $p\leq0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{b_i} \geq \frac{n^{2-p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p}{\sum_{i=1}^{n} b_i}. \tag{7}$$

这是文[3]给出的关于文[2]中错误不等式的修正的结果. 在不等式(3)中, 令 $b_i = -a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 得

推论 2 设 $a_i > 0, (i = 1, 2, \cdots, n), n > 1, rs > 0, r - s \geq 1$(或 $r \leq 0, s > 0$), 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r \left(-a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{-s} \geq n^{1+s-r}(n-1)^{-s}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{r-s}. \tag{8}$$

特别地, 在式(8)中令 $s = 1$, 得

推论 3 设 $a_i > 0, (i = 1, 2, \cdots, n), n > 1, r \geq 2$ 或 $r \leq 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r \left(-a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} \geq n^{2-r}(n-1)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{r-1}. \tag{9}$$

它进一步推广了文[8, 9]的结果.

参 考 文 献

1 匡继昌. 常用不等式[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1993. 173～174

2 胡道煊. 一个不等式的推广[J]. 数学通报, 1993, (9): 43～44

3 杨克昌. 关于"一个不等式的推广"的失误与纠正[J]. 数学通报, 2001(1): 37～38

4 王国平. 一个不等式及一类分式不等式的证明[J]. 河北理科教学研究, 2002, (1): 47～48

5 吴承 , 李绍宗. 不等式的证明[M]. 上海: 上海教育出版社, 1987. 118～120

6 刘玉琏, 傅沛仁. 数学分析讲义: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992. 249～250

7 王向东, 苏化明, 王方汉. 不等式 · 理论 · 方法[M]. 郑州: 河南教育出版社, 1994. 434～435

8 徐 丹, 杨 露. 一个不等式的再推广[J]. 数学通报, 2001, (10): 43～44

9 方 明. 一个不等式的注记[J]. 数学通报, 1999, (6): 40～41

Exponential Generalization of Randon Inequality

Wu Shanhe

(Dept. of Math., Longyan College, 364012, Longyan, China)

Abstract Exponential generalization of Randon inequality is established by applying Hölder's inequality and Young inequality and power mean inequality

Keywords Randon inequalily, exponent, exponential generalization

本期英文审校 李 坚