第 24 卷 第 1 期
2003 年 1 月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol. 24 No. 1
Jan. 2003

文章编号 1000-5013(2003)01-0022-05

对流方程一族新的三层双参数高精度格式

曾 文 平

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 对对流方程 $u_t = au_x$(其中 a 为常数), 构造一族新的含双参数高精度的三层差分格式. 当参数 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ 时, 得到一个双层格式. 这些格式对任意选取的非负参数都是绝对稳定的, 其局部截断误差阶为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$. 数值试验表明, 所建立的差分格式是有效的, 理论分析是正确的.

关键词 对流方程, 高精度, 绝对稳定, 差分格式

中图分类号 O 241.82 文献标识码 A

人们一直对对流方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x}$ 感兴趣, 已建立了各种各样的差分格式[1~4]. 本文构造了一族 3 层(特殊情况下为两层)含双参数、绝对稳定的新的高精度隐式差分格式, 其局部截断误差阶达 $O((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$. 对任意选取的非负参数 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 都是绝对稳定的. 当参数 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ 时, 得到一个两层恒稳的差分格式. 数值试验表明, 本文所建立的差分格式是有效的, 理论分析与数值试验相吻合.

1 差分格式的格造

考虑对流方程的周期初值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad a \text{ 为常数}, \\ &u(x, 0) = f(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \\ &u(x + L, t) = u(x, t), \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

设问题(1)的解 $u(x, t)$ 充分光滑使得如下关系式成立, 即

$$\frac{\partial^{q+p} u}{\partial t^q \partial x^p} = a^q \frac{\partial^{q+p} u}{\partial x^{q+p}}, \qquad p, q = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

又设时间步长为 Δt, 空间步长为 Δx. 网格区域由点集 (x_j, t_n) $(j = 0, 1, \cdots, J;\ n = 0, 1, 2, \cdots)$ 所组成, 其中 $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$, $\Delta x = L/J$, L 为周期. 再设 $r = a\Delta t/\Delta x$, 在网点 (x_j, t_n) 处的网格函

收稿日期 2001-10-22 作者简介 曾文平(1940-), 男, 教授
基金项目 华侨大学科研基金资助项目(01HZR04)

数 $u(x_j, t_n)$ 记为 u_j^n. 对对流方程(1) 构造出如下的三层双参数隐式差分格式为

$$-\frac{1}{180\Delta t}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j+2}^{n+1}-2\alpha u_{j+2}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j+2}^{n-1}\right]+$$

$$\frac{17}{90\Delta t}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j+1}^{n+1}-2\alpha u_{j+1}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j+1}^{n-1}\right]+$$

$$\frac{19}{30\Delta t}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j}^{n+1}-2\alpha u_{j}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j}^{n-1}\right]+$$

$$\frac{17}{90\Delta t}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j-1}^{n+1}-2\alpha u_{j-1}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j-1}^{n-1}\right]-$$

$$\frac{1}{180\Delta t}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j-2}^{n+1}-2\alpha u_{j-2}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j-2}^{n-1}\right]=$$

$$a\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\left(\frac{1}{2}-2\beta\right)\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\frac{u_{j+1}^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x}\right\}. \tag{3}$$

差分格式(3) 的实参数偶为非负实数偶. 对参数偶(α, β) 的不同选取, 便可得到不同的差分格式. 特别地, 当 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$ 时成为两层十点隐格式

$$-8\left(u_{j+2}^{n+1}+u_{j-2}^{n+1}\right)+272\left(u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}\right)+$$

$$912u_j^{n+1}-360r\left(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)=$$

$$-8\left(u_{j+2}^{n}+u_{j-2}^{n}\right)+272\left(u_{j+1}^{n}+u_{j-1}^{n}\right)+912u_j^{n}+360r\left(u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}\right). \tag{4}$$

又如可取 $\alpha=0, \beta=0$; $\alpha=0, \beta=\frac{1}{4}$ 及 $\alpha=1, \beta=\frac{1}{4}$ 等等. 因篇幅关系, 恕不一一列出.

2　截断误差的讨论

对流方程(1) 的差分格式(3) 的截断误差阶可达 $O((\Delta t)^2+(\Delta t)^2(\Delta x)^2+(\Delta x)^6)$, 下面给以证明. 记

$$D_t(\alpha, j)=\frac{1}{\Delta t}\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_j^{n+1}-2\alpha u_j^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_j^{n-1}\right\} \tag{5}$$

及

$$\Delta_x(n)=a\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}. \tag{6}$$

于网格点$(j\Delta x, n\Delta t)$ 处, 进行 Taylor 展开并利用式(2), 可得

$$D_t(\alpha, j)=\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{6}(\Delta t)^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O((\Delta t)^3) \tag{7}$$

及

$$\Delta_x(n)=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{6}(\Delta x)^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+\frac{1}{120}(\Delta x)^4\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}+$$

$$\frac{1}{5\,040}(\Delta x)^6\frac{\partial^7 u}{\partial t\partial x^6}+O((\Delta x)^8). \tag{8}$$

进一步进行 Taylor 展开并利用式(2) 及式(7), (8), 且设格式(3) 的截断误差为 Q, 可得

$$Q = \left(\frac{1}{5\,040} - \frac{1}{2\,160}\right)(\Delta x)^6 \frac{\partial^7 u}{\partial t \partial x^6} + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\beta\right)\right](\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} +$$

$$\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{36}\right)(\Delta t)^2(\Delta x)^2 \frac{\partial^5 u}{\partial t^3 \partial x^2} = -\left(\frac{1}{12} + \beta\right)(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} +$$

$$\frac{1}{18}(\Delta t)^2(\Delta x)^2 \frac{\partial^5 u}{\partial t^3 \partial x^2} = -\frac{1}{3\,780}(\Delta x)^6 \frac{\partial^7 u}{\partial t \partial x^6}. \tag{9}$$

所以, 格式(3)的截断误差阶为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$. 特别当 $\beta = -\frac{1}{12}$ 时, 截断误差阶可达 $O((\Delta t)^3 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$, 但不满足稳定条件, 故截误差阶仅为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$, 不可能更高了.

3　差分格式稳定性

为分析差分格式(3)的稳定性, 先叙述如下的 Miller 准则[5].

考虑复系数二次方程

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \qquad A \neq 0 \tag{10}$$

的根 λ_1, λ_2 的模大小. 设 $\lambda_1 = \rho e^{i\varphi}, \lambda_2 = d e^{i\psi}$, 且 $\rho \geq d$, 则有如下 Miller 准则.

(1) 若 $|A| > |C|$, 则

$$\rho \leq 1 \Leftrightarrow |\bar{A}B - \bar{B}C| \leq |A|^2 - |C|^2,$$

$$\rho < 1 \Leftrightarrow |\bar{A}B - \bar{B}C| < |A|^2 - |C|^2.$$

(2) 若 $|A| = |C|$, 则

$$\rho = d = 1,\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow \bar{A}B = \bar{B}C \text{ 且 } |B| < 2|A|.$$

现用 Fourier 方法[6]研究差分格式族(3)的稳定性. 令 $u_j^n = \lambda^n e^{ij\theta}(|\theta| < \pi)$ 代入格式(3), 可得其传播矩阵的特征方程为形如式(10)的复系数二次方程, 其中

$$A = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)F + i\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta\right)G,$$

$$B = -\left[2\alpha F - i\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)G\right],$$

$$C = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)F + i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + \beta\right)G. \tag{11}$$

式(11)中

$$F = -\frac{1}{180} \cdot 2\cos 2\theta + \frac{17}{90} \cdot 2\cos\theta + \frac{19}{30} =$$

$$1 + \frac{1 - \cos 2\theta}{90} - \frac{34}{90}(1 - \cos\theta) =$$

$$1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{4}{45}\sin^4\frac{\theta}{2} \geq$$

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{45} = \frac{11}{45} > 0, \tag{12}$$

$$G = r\sin\theta. \tag{13}$$

以下分两种情况进行讨论.

(A) 当 $\alpha = 0$ 时, 对任意 $\beta \geq 0$, 有

$$A = \frac{1}{2}F + \mathrm{i}\left(\frac{1}{4} + \beta\right)G,$$

$$B = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)G,$$

$$C = -\frac{1}{2}F + \mathrm{i}\left(\frac{1}{4} + \beta\right)G.$$

因此可见, $|A| = |C|$, 且

$$\bar{A}B = \left[\frac{1}{2}F - \mathrm{i}\left(\frac{1}{4} + \beta\right)G\right]\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)G\right] = \bar{B}C,$$

又

$$|B| = \left|\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)G\right| < 2|A| =$$

$$\left|F + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} + 2\beta\right)G\right| = \left[F^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\beta\right)^2 G^2\right]^{1/2}.$$

故由 Miller 准则知, 当 $\alpha = 0, \beta \geq 0$ 时, 特征方程(10) 的两根按模小于等于 1, 且无模为 1 的重根 .

(B) 当 $\alpha \neq 0$ 时, 显见当 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 时, 有 $|A| > |C|$, 且

$$|\bar{A}B - \bar{B}C| = \alpha\left| -2F^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)G^2 + \mathrm{i}2FG\right|^2 =$$

$$\alpha\left\{4F^4 - 4\left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)F^2G^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)^2 G^4 + 4F^2G^2\right\}^{1/2} =$$

$$\alpha\left\{4F^4 + 4\left(\frac{1}{2} - \beta\right)F^2G^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\beta\right)^2 G^4\right\}^{1/2} <$$

$$|A|^2 - |C|^2 = \alpha\left\{2F^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\beta\right)G^2\right\}.$$

故由 Miller 准则可知, 当 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 时, 特征方程(10) 的两根按模小于 1.

综上所述, 由差分格式稳定性理论可得如下基本定理 .

定 理　逼近于对流方程周期问题(1) 的差分格式(3), 对任意选取的非负参数 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 均绝对稳定 . 特别地, 格式(4) 绝对稳定 .

4　数值例子

解对流方程周期初值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x}, \quad a \text{ 为常数}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ &u(x, o) = \sin x, \quad x \in \mathbf{R}, \\ &u(x, t) = u(x + 2\pi, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其精确解为

$$u(x, t) = \sin(at + x), \tag{15}$$

利用格式(4) 进行求解. 取 $\Delta x = \frac{2\pi}{64} = \frac{\pi}{32}$, $\Delta t = \frac{r}{a}\Delta x$, $a = \pm 1$, $|r| = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ 进行计算到 $n =$

500. 列出格式(4)数值解与精确解比较表，如表1所示．数值结果表明，本文格式解与精确解有较好的吻合，理论分析与实际计算是一致的．

表1 不同 x 值的数值结果比较表

a	$\lvert r\rvert$	解法	$\frac{5\pi}{32}$	$\frac{17\pi}{32}$	$\frac{29\pi}{32}$	$\frac{41\pi}{32}$	$\frac{53\pi}{32}$
-1	$\frac{1}{4}$	精确解	0.707 107	0.923 880	0.000 000	-0.923 880	-0.707 107
		格式(4)	0.707 542	0.923 644	-0.000 616	-0.924 115	-0.706 671
	$\frac{1}{2}$	精确解	0.881 921	0.773 010	-0.290 285	-0.995 185	-0.471 397
		格式(4)	0.884 233	0.769 876	-0.294 996	-0.995 656	-0.467 046
	1	精确解	0.995 185	0.290 285	-0.773 010	-0.881 921	0.098 017
		格式(4)	0.990 556	0.252 395	-0.797 381	-0.862 684	0.137 111
1	$\frac{1}{4}$	精确解	0.195 090	0.980 785	0.555 570	-0.555 570	-0.980 785
		格式(4)	0.194 486	0.980 665	0.556 082	-.555 058	-0.980 905
	$\frac{1}{2}$	精确解	-0.098 017	0.881 921	0.773 010	-0.290 285	-0.995 185
		格式(4)	-0.102 919	0.879 588	0.776 126	-0.285 567	-0.994 690
	1	精确解	-0.634 393	0.471 397	0.995 185	0.290 285	-0.773 010
		格式(4)	-0.664 327	0.436 320	0.998 271	0.327 724	-0.747 442

参考文献

1 陆金甫，关 治．偏微分方程数值解法[M]．北京：清华大学出版社，1987. 50～132

2 朱动兰，钟锡昌，陈炳木．初边值问题差分方法及绕流[M]．北京：科学出版社，1980. 25～67

3 陈材侃．计算流体力学[M]．重庆：重庆出版社，1992. 1～62

4 曾文平．对流方程的一类新的恒稳差分格式[J]．华侨大学学报(自然科学版)，1997，18(3)：225～230

5 邬华谟．二次多项式根的Schur-Cohn定理和Miller定理的初等证明[J]．数值计算与计算机应用，1982，(3)：356～359

6 Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-vlue problems[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967. 38～107

A New Family of Three-Layer and Bi-Parametric Difference Schemes with High Accuracy for Solving Convection Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract For solving convection equation $u_t = au_x$, where a is a constant, a new family of three-layer and bi-parametric difference schemes with high accuracy are constructed; and a double-layer scheme will be obtained in case $\alpha = \frac{1}{2}$ and $\beta = 0$. All these schemes are absolutely stable for non-negative parameters chosen arbitrarily with the local truncation error of $O((\Delta t)^2 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$. As indicated by numerical experimentation, the difference schemes so established are effective and the theoretical analysis of them is correct.

Keywords convection equation, high accuracy, absolutely stable, difference scheme