第 24 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 1
2003 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2003

文章编号　1000-5013(2003)01-0016-05

时延细胞神经网络的概周期解问题

谢惠琴　　王全义

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要　研究时延细胞神经网络的概周期解问题, 巧妙地引入可调实参数 $d_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$. 获得该神经网络存在唯一的概周期解的充分条件, 以及所有其它解均指数地收敛于此概周期解的充分条件.

关键词　神经网络, 概周期解, 存在性, 全局指数稳定性

中图分类号　O 175.1　　文献标识码　A

从 1988 年 Chua 提出细胞神经网络(CNN)理论与应用以来, 由于其巨大的潜在应用前景, CNN 现已成为神经网络研究的新热点. 近年来, 许多学者已深入研究了细胞神经网络(CNN)和时延细胞神经网络(DCNN)的动力学行为[1~3], 并且得到许多重要结果. 这些文章只研究细胞神经网络的周期解与平衡点问题, 而很少研究神经网络的概周期解问题[4]. 大家知道, 研究时延细胞神经网络的概周期解问题是十分困难的. 本文的目的是通过变量替换, 巧妙地引入参数 $d_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$. 利用不动点定理, 通过构造 Lyapunov 泛函, 研究时延细胞神经网络的概周期解问题, 给出一些新的充分条件. 为此, 研究时延细胞神经网络

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) +$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(\sigma_j x_j(t - \tau_j)) + I_i(t), \qquad c_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

的概周期解问题. 其中 n 是神经网络中神经元的个数, $x_i(t)$ 表示第 i 个神经元在 t 时刻的状态变量, $f_j(x_j(t))$ 表示第 j 个神经元在 t 时刻的输出, $a_{ij}, b_{ij}, \sigma_i, c_i$ 是常数, a_{ij} 表示第 j 个神经元 t 时刻的输出对第 i 个神经元的影响程度, b_{ij} 表示第 j 个神经元 $t - \tau_j$ 时刻的输出对第 i 个神经元的影响程度, $I_i(t)$ 是对第 i 个神经元在 t 时刻的偏置, τ_j 是非负常数, σ_i 表示放大器放大率, c_i 表示在与神经网络不连通并且无外部附加电压差的情况下, 第 i 个神经元恢复孤立静息状态的速率. 假设 $I_i(t)$ 为 R 上的概周期函数, 方程(1)的初始条件为

$$x_i(s) = \varphi_i(s), \qquad s \in [-\tau, 0], \qquad \tau = \max_{1 \le i \le n} \tau_i, \tag{2}$$

其中 φ_i: $[-\tau, 0] \to R (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是连续的. 我们假定神经元的输出 $f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 与其状态, 满足关系 (H_1) $f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 R 上的有界连续函数, 而且 $f_i(0) = 0$; (H_2) 存在常数

收稿日期　2002-07-09　　作者简介　谢惠琴(1977-), 女, 硕士研究生

基金项目　国务院侨务办公室科研基金资助项目(01QZR02)

$\mu_i > 0$, 使得

$$|f_i(u) - f_i(v)| \le \mu_i |u - v|, \qquad \forall u, \quad v \in R, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

1　主要结果

定理　假设神经元的输出 $f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足条件 (H_1) 和 (H_2), 且假设系统参数满足条件 (H_3) 存在实数 $d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则使得

$$r = \max_{1 \le i \le n} c^{-1} \sum_{j=1}^{n} d_j^{-1} \mu_i d_i |a_{ji}| + \max_{1 \le i \le n} c^{-1} \sum_{j=1}^{n} d_j^{-1} \mu_i d_i |\sigma_i| \cdot |b_{ji}| < 1$$

成立. 这里 $c = \max_{1 \le i \le n} c_i$, 则模型 (1) 存在唯一的概周期解 $\boldsymbol{x}^*(t)$, $\|\boldsymbol{x}^*\| \le \frac{d}{1-r} I^{(m)}$. 其中 $I^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{I_i^{(m)}}{d_i c_i}$, $I_i^{(m)} = \sup_{t \in R} |I_i(t)|$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\|\boldsymbol{x}^*\| = \sup_{t \in R} \sum_{i=1}^{n} |x_i^*|$, $d = \max_{1 \le i \le n} \{d_i\}$. 并且, 当 $t \to +\infty$ 时, 方程 (1) 的所有其它解均指数地收敛于这个概周期解.

证明　在方程 (1) 中, 令

$$x_i(t) = d_i y_i(t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则有

$$y_i'(t) = -c_i y_i(t) + d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(d_j y_j(t)) + d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(d_j \sigma_j y_j(t - \tau_j)) + d_i^{-1} I_i(t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

显然, 如果方程 (3) 存在概周期解, 则方程 (1) 也存在概周期解. 为此, 仅需研究方程 (3) 的概周期解的存在性.

令 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$, 我们把式 (3) 写成形式为

$$\mathring{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}(t)) + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\sigma\boldsymbol{y}(t - \tau_j)) + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{I}(t), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $\sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n \times n}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}(t)) = [f_1(d_1 y_1(t)), f_2(d_2 y_2(t)), \cdots, f_n(d_n y_n(t))]^{\mathrm{T}}$, 而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\sigma\boldsymbol{y}(t)) = [f_1(d_1\sigma_1 y_1(t)), f_2(d_2\sigma_2 y_2(t)), \cdots, f_n(d_n\sigma_n y_n(t))]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{I}(t) = [I_1(t), I_2(t), \cdots, I_n(t)]^{\mathrm{T}}$. 对任意 $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$, 定义其范数为 $\|\boldsymbol{x}(t)\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|$. 令

$$E = \{\boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{u} : R \to R^n \text{ 是概周期函数}\},$$

对任意 $\boldsymbol{u} \in E$, 定义其诱导范数为 $\|\boldsymbol{u}\| = \sup_{t \in R} \|\boldsymbol{u}(t)\|$, 则 E 是一个 Banach 空间.

对 $\forall \boldsymbol{u} \in E$, 考虑如下非线性常微分方程

$$\mathring{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)) + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\sigma\boldsymbol{u}(t - \tau_j)) + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{I}(t) \tag{5}$$

的概周期解. 显然, 矩阵 $-\boldsymbol{C}$ 是概周期的, 所以式 (5) 对应的齐次方程为

$$\mathring{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

在 R 上具有指数型二分性. 又 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)) + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}\sigma\boldsymbol{u}(t - \tau_j)) + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{I}(t)$ 是概周期向量函数, 由文献 [5] 中定理 3.4 可知, 方程 (5) 存在唯一概周期解. 即

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{u}}(t) = \Big(\int_{-\infty} \mathrm{e}^{-c_1(t-s)} \Big[\sum_{j=1}^{n} d_1^{-1} a_{1j} f_j(d_j u_j(s)) + \sum_{j=1}^{n} d_1^{-1} b_{1j} f_j(d_j \sigma_j u_j(s - \tau_j)) + d_1^{-1} I_1(s)\Big] \mathrm{d}s, \cdots, \int_{-\infty} \mathrm{e}^{-c_n(t-s)} \cdot$$

$$[\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1} a_{nj} f_j(d_j u_j(s)) + \sum_{j=1}^{n} d_n^{-1} b_{nj} f_j(d_j \sigma_j u_j(s-\tau_j)) + d_n^{-1} I_n(s)]\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}.$$

定义映射 $T: E \to E$, 有

$$T(\boldsymbol{u})(t) = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{u}}(t), \qquad \forall\, \boldsymbol{u} \in E. \tag{6}$$

下面证明 $T: E \to E$ 是一个压缩映射. 事实上, 由条件(H_2)有

$$\begin{aligned}
\| T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{v}) \| &= \sup_{t\in R} \| T(\boldsymbol{u})(t) - T(\boldsymbol{v})(t) \| \leq \\
&\sup_{t\in R}\Big\{ \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c_1(t-s)} [\sum_{j=1}^{n} d_1^{-1} |a_{1j}| \cdot |f_j(d_j u_j(s)) - f_j(d_j v_j(s))| + \\
&\sum_{j=1}^{n} d_1^{-1} |b_{1j}| \cdot |f_j(d_j \sigma_j u_j(s-\tau_j)) - \\
&f_j(d_j \sigma_j v_j(s-\tau_j))|]\mathrm{d}s + \cdots + \\
&\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c_n(t-s)} [\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1} |a_{nj}| \cdot |f_j(d_j u_j(s)) - f_j(d_j v_j(s))| + \\
&\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1} |b_{nj}| \cdot |f_j(d_j \sigma_j u_j(s-\tau_j)) - f_j(d_j \sigma_j v_j(s-\tau_j))|]\mathrm{d}s\Big\} \leq \\
&\sup_{t\in R}\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c_i(t-s)} [\sum_{j=1}^{n} d_i^{-1} |a_{ij}| \mu_j d_j |u_j(s) - v_j(s)| + \\
&\sum_{j=1}^{n} d_i^{-1} |b_{ij}| \mu_j d_j |\sigma_j| \cdot |u_j(s-\tau_j) - v_j(s-\tau_j)|]\mathrm{d}s\Big\} = \\
&\sup_{t\in R}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c_j(t-s)} [\sum_{i=1}^{n} d_j^{-1} |a_{ji}| \mu_i d_i |u_i(s) - v_i(s)| + \\
&\sum_{i=1}^{n} d_j^{-1} |b_{ji}| \mu_i d_i |\sigma_i| \cdot |u_i(s-\tau_i) - v_i(s-\tau_i)|]\mathrm{d}s\Big\} \leq \\
&\sup_{t\in R}\Big\{ \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} d_j^{-1} |a_{ji}| \mu_i d_i \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c(t-s)} \sum_{i=1}^{n} |u_i(s) - v_i(s)| \mathrm{d}s + \\
&\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} d_j^{-1} |b_{ji}| \mu_i d_i |\sigma_i| \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c(t-s)} \sum_{i=1}^{n} |u_i(s-\tau_i) - \\
&v_i(s-\tau_i)| \mathrm{d}s\Big\} \leq [\max_{1\leq i\leq n} c^{-1} \sum_{j=1}^{n} d_j^{-1} \mu_i d_i |a_{ji}| + \max_{1\leq i\leq n} c^{-1} \cdot \\
&\sum_{j=1}^{n} d_j^{-1} \mu_i d_i |\sigma_i| \cdot |b_{ji}|] \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \| = \\
&r \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \|.
\end{aligned}$$

注意到 $r < 1$, 所以映射 T 是压缩映射. 从而 T 有唯一不动点 $\boldsymbol{y}^* \in E$ 使得 $T\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}^*$, 即

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^*(t) = (&\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c_1(t-s)} [\sum_{j=1}^{n} d_1^{-1} a_{1j} f_j(d_j y_j^*(s)) + \\
&\sum_{j=1}^{n} d_1^{-1} b_{1j} f_j(d_j \sigma_j y_j^*(s-\tau_j)) + d_1^{-1} I_1(s)]\mathrm{d}s, \cdots, \\
&\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-c_n(t-s)} [\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1} a_{nj} f_j(d_j y_j^*(s)) + \\
&\sum_{j=1}^{n} d_n^{-1} b_{nj} f_j(d_j \sigma_j y_j^*(s-\tau_j)) + d_n^{-1} I_n(s)]\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

由式(7)即知 $\boldsymbol{y}^*(t)$ 是连续可微的, 直接对式(7)求导即知 $\boldsymbol{y}^*(t)$ 是方程(3)的解. 因此, $\boldsymbol{y}^*(t)$ 是方程(3)在 E 中唯一的概周期解. 文

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i^*(t)\right| \le &\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} e^{-c_i(t-s)}\Big|\sum_{j=1}^{n}d_i^{-1}a_{ij}f_j(d_jy_j^*(s)) + \\ &\sum_{j=1}^{n}d_i^{-1}b_{ij}f_j(d_j\sigma_jy_j^*(s-\tau_j)) + d_i^{-1}I_i(s)\Big|\,ds \le \\ &\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} e^{-c_i(t-s)}\Big[\sum_{j=1}^{n}d_i^{-1}|a_{ij}|\mu_jd_j|y_j^*(s)| + \\ &\sum_{j=1}^{n}d_i^{-1}|b_{ij}|\mu_jd_j|\sigma_j|\cdot|y_j^*(s-\tau_j)| + d_i^{-1}|I_i(s)|\Big]\,ds = \\ &\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} e^{-c_j(t-s)}\Big[\sum_{i=1}^{n}d_j^{-1}|a_{ji}|\mu_id_i|y_i^*(s)| + \\ &\sum_{i=1}^{n}d_j^{-1}|b_{ji}|\mu_id_i|\sigma_i|\cdot|y_i^*(s-\tau_i)| + d_j^{-1}|I_j(s)|\Big]\,ds \le \\ &\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}d_j^{-1}\mu_id_i|a_{ji}|\int_{-\infty}^{t} e^{-c(t-s)}\sum_{i=1}^{n}|y_i^*(s)|\,ds + \\ &\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}d_j^{-1}\mu_id_i|\sigma_i|\cdot|b_{ji}|\int_{-\infty}^{t} e^{-c(t-s)}\sum_{i=1}^{n}|y_i^*(s-\tau_i)|\,ds + \\ &\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} e^{-c_i(t-s)}d_i^{-1}|I_i(s)|\,ds.\end{aligned}$$

两边同取上确界, 有

$$\begin{aligned}\|y^*\| \le &\Big(\max_{1\le i\le n}c^{-1}\sum_{j=1}^{n}d_j^{-1}\mu_id_i|a_{ji}| + \\ &\max_{1\le i\le n}c^{-1}\sum_{j=1}^{n}d_j^{-1}\mu_id_i|\sigma_i|\cdot|b_{ji}|\Big)\|y^*\| + \sum_{i=1}^{n}c_i^{-1}d_i^{-1}I_i^{(m)} = \\ &r\|y^*\| + I^{(m)}.\end{aligned}$$

从而有 $\|y^*\| \le \frac{1}{1-r}I^{(m)}$. 所以, $x^*(t) = Dy^*(t)$ 是方程(1)唯一的概周期解, 且 $\|x^*\| \le \frac{d}{(1-r)}\cdot I^{(m)}$. 这里 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$.

下面证明当 $t\to+\infty$时, 方程(1)的所有其它解均指数地收敛于 $x^*(t)$.

由式(3)知偏差 $z_i(t)=y_i(t)-y_i^*(t)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$\begin{aligned}&x_i(t) - x_i^*(t) = d_iz_i(t),\\ &z_i'(t) = -c_iz_i(t) + d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(d_j(z_j(t)+y_j^*(t))) - f_j(d_jy_j^*(t))] + \\ &\qquad d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[f_j(d_j\sigma_j(z_j(t-\tau_j)+y_j^*(t-\tau_j))) - \\ &\qquad f_j(d_j\sigma_jy_j^*(t-\tau_j))],\qquad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\tag{8}$$

由定理的条件知存在足够小的 $\epsilon< 0$, 使得

$$-c+\epsilon+\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}d_j^{-1}\mu_id_i(|a_{ji}|+|\sigma_i|\cdot|b_{ji}|)e^{\epsilon\tau}<0.$$

考虑Lyapunov 泛函

$$V(t)=V(t,z_t)=\sum_{i=1}^{n}|z_i(t)|e^{\epsilon t}+\sum_{i=1}^{n}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau_j}^{t}\mu_jd_j|b_{ij}|\cdot|\sigma_j|\cdot|z_j(s)|e^{\epsilon(s+\tau_j)}ds.$$

沿(8)式的解计算 V 的变化率, 并注意到条件(H_2), 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(8)} \leq \sum_{i=1}^{n}[-c_i|z_i(t)| + d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\mu_j d_j|z_j(t)| + d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\mu_j d_j|\sigma_j|\cdot|z_j(t-\tau_j)|]\mathrm{e}^{\epsilon t} + \epsilon\sum_{i=1}^{n}|z_i(t)|\mathrm{e}^{\epsilon t} + \sum_{i=1}^{n}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mu_j d_j|b_{ij}|\cdot|\sigma_j|\cdot|z_j(t)|\mathrm{e}^{\epsilon(t+\tau_j)} - \sum_{i=1}^{n}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mu_j d_j|b_{ij}|\cdot|\sigma_j|\cdot|z_j(t-\tau_j)|\mathrm{e}^{\epsilon t} \leq -\sum_{i=1}^{n}c_i|z_i(t)|\mathrm{e}^{\epsilon t} + \epsilon\sum_{i=1}^{n}|z_i(t)|\mathrm{e}^{\epsilon t} + \sum_{i=1}^{n}d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mu_j d_j(|a_{ij}| + |\sigma_j|\cdot|b_{ij}|)|z_j(t)|\mathrm{e}^{\epsilon(t+\tau_j)} \leq [-c+\epsilon+\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}d_j^{-1}\mu_i d_i(|a_{ji}| + |\sigma_i|\cdot|b_{ji}|)\mathrm{e}^{\epsilon\tau}]\sum_{i=1}^{n}|z_j(t)|\mathrm{e}^{\epsilon t} < 0.$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(8)} < 0.$$

上式两边从0积分到t, 有

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i(t)|\mathrm{e}^{\epsilon t} \leq V(t) \leq V(0), \qquad t \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i(t)| \leq V(0)\mathrm{e}^{-\epsilon t}, \qquad t \geq 0,$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t) - x_i^*(t)| = \sum_{i=1}^{n}d_i|z_i(t)| \leq \max_{1\leq i\leq n}d_i\cdot V(0)\mathrm{e}^{-\epsilon t}, \qquad t \geq 0.$$

这表明当$t\to+\infty$时, 方程(1)的所有其它解均指数地收敛于$\boldsymbol{x}^*(t)$. 证毕.

推论1 若$I_i(t)$是周期为ω的连续周期函数, 且系统(1)满足定理的条件, 则系统(1)存在唯一的ω-周期解$\boldsymbol{x}^*(t)$, $\|\boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{d}{(1-r)}I^{(m)}$. 这里各符号的含义与定理中相同, 且当$t\to+\infty$时, 系统(1)的所有其它解均指数地收敛于这个周期解.

证明　由推论1的条件知系统(1)满足定理的条件, 故可设$\boldsymbol{x}^*(t)$是系统(1)的唯一的概周期解. 因为这时系统(1)是周期系统, 因此$\boldsymbol{x}^*(t+\omega)$也是它的解, 且为概周期解. 故由概周期解的唯一性知$\boldsymbol{x}^*(t+\omega)=\boldsymbol{x}^*(t)$, 即$\boldsymbol{x}^*(t)$为$\omega$-周期解. 证毕.

同样地, 容易得到

推论2 若$I_i(t)=I_i$, I_i是常数, 且系统(1)满足定理的条件, 则系统(1)存在唯一的平衡点, 并且是全局指数稳定的.

2　例子

例　考虑系统

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} |x_1(t)+1| - |x_1(t)-1| \\ \left|\frac{1}{2}x_2(t)+1\right| - \left|\frac{1}{2}x_2(t)-1\right| \end{pmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \left|\frac{1}{2}x_1(t-\tau)+1\right| - \left|\frac{1}{2}x_1(t-\tau)-1\right| \\ \left|\frac{1}{2}x_2(t-\tau)+1\right| - \left|\frac{1}{2}x_2(t-\tau)-1\right| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t+\sin\sqrt{2}t \\ \cos t+\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}. \tag{9}$$

这里神经元的输出与其状态的关系, 由函数

$$f_1(x) = |x+1| - |x-1|, \qquad f_2(x) = \left|\frac{1}{2}x+1\right| - \left|\frac{1}{2}x-1\right|$$

刻划, $\sigma_1 = \frac{1}{2}$, $\sigma_2 = 1$, τ是非负常数. 有

$$c_1 = c_2 = 2, \quad I_1(t) = \sin t+\sin\sqrt{2}t, \quad I_2(t) = \cos t+\cos\sqrt{2}t$$

是概周期函数. 我们取 $d_1 = d_2 = \frac{3}{4}$, 显然, $f_1(x)$, $f_2(x)$ 满足(H_1), (H_2), $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, 又

$$r = \max_{1\le i\le n} c^{-1}\sum_{j=1}^{n} d_j^{-1}\mu_i d_i |a_{ji}| + \max_{1\le i\le n} c^{-1}\sum_{j=1}^{n} d_j^{-1}\mu_i d_i |\sigma_i| \cdot |b_{ji}| = \frac{7}{8} < 1.$$

故由定理可知, 方程(9) 存在唯一的概周期解 $\boldsymbol{x}^*(t)$, 并且, 当 $t\to+\infty$时, 方程(9) 的所有其它解均指数地收敛于这个概周期解.

参　考　文　献

1　廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅰ)[J]. 中国科学(A 辑), 1994, 24(9): 902～910

2　廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅱ)[J]. 中国科学(A 辑), 1994, 24(10): 1 037～1 046

3　曹进德. 时延细胞神经网络的指数稳定性和周期解[J]. 中国科学(E 辑), 2000, 30(6): 541～549

4　陈安平, 黄立宏. Hopfield 神经网络概周期解的存在性和全局吸引性[J]. 数学物理学报, 2001, 21(A): 505～511

5　He Chongyou. Almost periodic differential equation[M]. Beijing: Higher Education Publishing House, 1992. 93～94

Problem of Almost Periodic Solution to Cellular Neural Network with Time Delay

Xie Huiqin　　Wang Quanyi

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou, China)

Abstract　A study is made on the problem of almost periodic solution to cellular neural network with time delay. By ingeniously leading in the adjustable real parameter $d_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, the authors obtain sufficient condition for unique almost periodic solution to be existed in this neural network as well as sufficient condition for all other solutions to be exponentially converged on this almost periodic solution.

Keywords　neural network, almost periodic solution, existence, globally exponential stability