

文章编号 1000-5013(2002) 04-0366-05

# 框架结构二阶位移效应数值解

黄 庆 丰

( 华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

**摘要** 通过静力凝聚法, 得到框架结构的弹性平移刚度矩阵和水平运动平衡方程, 并用 Gramer 法则确定结构各层抗推刚度. 在此基础上, 根据转角位移方程、叠加原理和迭代方法计算二阶位移, 分析  $P-\Delta$  效应使结构层转角变化对层间位移的影响. 该解法计算结果逼近精确解, 误差为 0.5% 左右, 适用性好、计算量小和容易实现.

**关键词** 框架结构, 静力凝聚, 二阶位移, 层转角

**中图分类号** TU 323.501

**文献标识码** A

二阶效应实质是小变形、大位移情况下的几何非线性问题, 所建立的微分方程一般难以直接求解. 迄今为止, 常采用连续化方法将结构化为一等代悬臂计算<sup>[1,2]</sup>, 或直接用杆系结构有限元法求解<sup>[3]</sup>. 本文针对框架结构, 在一阶侧向位移基础上, 运用叠加原理和迭代方法, 计算结构二阶侧向位移效应. 将  $P-\Delta$  效应附加弯矩引起的结构变形增量, 分成纯弯曲型变形增量和纯剪切型变形增量两部分, 分析  $P-\Delta$  效应对结构层转角的影响. 用修正的固端弯矩计算  $P-\Delta$  效应位移, 导出侧向位移计算公式. 该方法便于结构设计工程师的快速设计, 有较好的实用价值.

## 1 一阶抗推刚度

结构计算常采用集中质量法, 排除结构转动自由度简化计算, 结果也较好地符合实际情况. 这种从结构刚度矩阵中消除不必要自由度的过程, 称为静力凝聚法<sup>[4]</sup>. 如果作用的外力向量不包含任何转动分量, 平衡方程可以表示成分块矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} K_{tt} & K_{t\theta} \\ K_{\theta t} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_t \\ \Delta_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_t \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

转角位移用水平位移表示

$$\Delta_\theta = -K_{\theta\theta}^{-1} K_{t\theta} \Delta_t. \quad (2)$$

水平方向运动平衡方程

$$K_{tt} \Delta_t = V_t, \quad (3)$$

其中

$$K_t = \Delta_t - K_{t\theta} K_{\theta\theta}^{-1} K_{\theta t} \quad (4)$$

为结构弹性平移刚度矩阵. 不妨令

$$\Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n], \quad (5)$$

$$V_i = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]. \quad (6)$$

用 Gramer 法则直接求解式(3)为

$$\Delta_i = \frac{1}{K_i} \sum_{m=1}^n A_{mi} V_m = \frac{1}{K_i} \left( \sum_{m=1}^n \frac{A_{mi} V_m}{V_i} \right) V_i, \quad (7)$$

$$V_i = D_i \Delta_i, \quad (8)$$

$$D_i = K_i / \sum_{m=1}^n \frac{A_{mi} V_m}{V_i}. \quad (9)$$

$D_i$  为结构  $i$  层的抗推刚度, 一般地说抗推刚度与水平荷载分布有关, 式中  $A_{mi}$  是行列式  $K_i$  的第  $m$  行  $i$  列代数余子式.

## 2 二阶位移计算

式(8)计算结构层间位移, 转角因素蕴涵于  $\Delta_i$  和  $D_i$  中考虑, 相当于采用图 1 所示的平移计算模型. 认为二阶位移是图 1 计算模型所示的一阶分析基础上, 叠加竖向荷载附加弯矩作用所得到的位移. 它相应于图 1 柱端转角为零情况, 二阶理论转角位移表达式为

$$\begin{cases} M_{ab,i} = -(\alpha + \beta_i) K_i \theta_i + C_{ab,i}, \\ M_{ba,i} = -(\alpha + \beta_i) K_i \theta_i + C_{ba,i}, \end{cases} \quad (10)$$

式中

$$K_i = D_i h_i^2 / 12, \quad (11)$$

表示  $i$  层抗推刚度相应的结构  $i$  层柱总线刚度. 有

$$\alpha = \frac{\epsilon \sin \epsilon - \epsilon^2 \cos \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}, \quad \beta = \frac{\epsilon^2 - \epsilon \sin \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon},$$

$$\epsilon = \frac{12 P_i / D_i h_i}{\Delta_i}, \quad \theta = \frac{\Delta_i}{h_i}.$$

$\alpha, \beta$  相当于一阶分析单跨超静定梁的载常数  $\lim_{P_i \rightarrow 0} \alpha = 4$ ,

$\lim_{P_i \rightarrow 0} \beta = 2$ ,  $C_{ab,i}, C_{ba,i}$  为固端弯矩. 本文取作用在柱节点  $a, b$  上的竖向力附加弯矩值. 竖向力附加弯矩作用下结构产生位移增量, 而位移增量又产生新的附加弯矩作用, 进而产生新的位移增量……可以采用迭代法求解这些位移增量, 即二阶位移增量. 二阶位移增量可为以下两部分引起.

### 2.1 结构挠曲引起

实际结构变形曲线不会与图 1 所示完全符合, 但挠曲二阶位移很小, 一般仅占总位移的 1%. 故近似认为挠曲二阶效应作用时图 1 计算模型仍然成立, 挠曲二阶位移增量用式(10)的系数  $(\alpha + \beta_i)$  体现.

### 2.2 结构弦转角引起

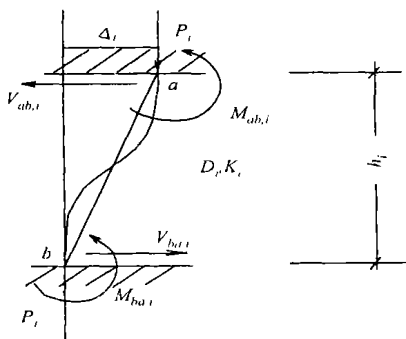


图 1 计算模型

$P-\Delta$  效应位移由与结构弦转角对应的竖向力附加弯矩引起, 附加弯矩图如图 2(a). 即使是剪切型变形的框架结构,  $P-\Delta$  效应附加弯矩也会引起相邻层节点的相对转动, 令  $i$  层上下节点相对转角增量为  $\delta\varphi$ . 此时,  $i$  层位移  $\Delta_i$  包含: (1) 一阶位移; (2) 二阶挠曲位移; (3)  $P-\Delta$  效应使层节点相对转动引起的位移; (4)  $P-\Delta$  效应使层剪力增加引起的位移. 求解  $P-\Delta$  效应位移增量前, 先讨论固端弯矩  $C_{ab,i}, C_{ba,i}$ . (1) 若  $\delta\varphi = 0$ , 由图 1 易知

$$C_{ab,i} = 0, \quad C_{ba,i} = P_i \Delta_i. \quad (12)$$

(2) 若  $\delta\varphi \neq 0$ , 将  $P-\Delta$  效应位移增量分成: (i) 纯弯曲型变形增量, 如图 2(b) 所示; (ii) 纯剪切型变形增量, 如图 2(c) 所示.

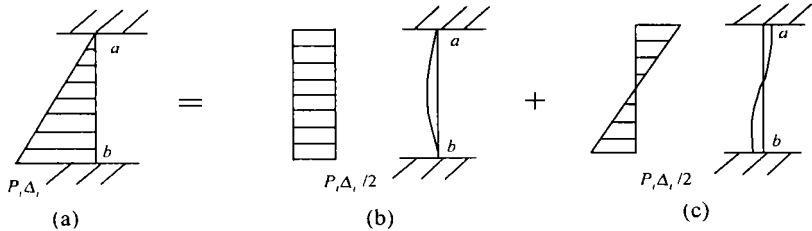


图 2 竖向力附加弯矩图

在图 2(b) 中, 有

$$\delta\mathcal{M}_{i,i} = \frac{1}{2}\delta\varphi, \quad \delta\mathcal{M}_{i,i} = -\frac{1}{2}\delta\varphi, \quad (13)$$

$$(\alpha + \beta_i)\delta\mathcal{M}_{i,i} = \frac{1}{2}P_i \Delta_i, \quad (14)$$

$$\delta\varphi = \frac{P_i \Delta_i}{(\alpha + \beta_i)K_i}. \quad (15)$$

式(10)把转角因素蕴涵于水平位移中计算. 如果直接在式(10)加上转角增量项修正  $P-\Delta$  效应转角位移增量影响, 则可叠加性不满足. 本文转而修正固端弯矩项, 将转角位移增量影响蕴涵在水平位移中. 竖向力附加弯矩引起的, 与层转角增量相应的水平位移增量部分为

$$\delta\Delta_i = -\delta\mathcal{M}_{i,i}h_i. \quad (16)$$

式(12)表示的固端弯矩修正为

$$C_{ab,i} = 0, \quad C_{ba,i} = P_i(\Delta_i - \delta\Delta_i). \quad (17)$$

$P-\Delta$  效应引起的纯弯曲型变形增量不可能增加层剪力, 从层剪力的计算也可以说明式(17)的合理性. 有

$$V_{ab,i} = V_{ba,i} = -\frac{M_{ab,i} + M_{ba,i}}{h_i}. \quad (18)$$

综合式(10), (11), (13)的式(15)~(18), 有

$$V_{ab,i} = V_{ba,i} = \left\{ \frac{1}{6}(\alpha + \beta_i)D_i - \frac{P_i}{h_i} \left[ 1 - \frac{6P_i}{(\alpha + \beta_i)D_i h_i} \right] \right\} \Delta_i, \quad (19)$$

$$V_{ab,i} = V_{ba,i} = D_i^{(2)} \Delta_i, \quad (20)$$

$$D_i^{(2)} = \left\{ \frac{1}{6}(\alpha + \beta_i) - \frac{P_i}{D_i h_i} \left[ 1 - \frac{6P_i}{(\alpha + \beta_i)D_i h_i} \right] \right\} D_i. \quad (21)$$

$D_i^{(2)}$  为考虑二阶效应结构  $i$  层的折剪抗推刚度, 式(21)等号后的系数为刚度折剪系数, 用  $\mu_i$  表

示为

$$\zeta = 1/\mu_i.$$

(22)

$\zeta$  为考虑二阶效应结构  $i$  层的位移放大系数. 以下在结构  $i$  层一阶位移  $\Delta^{(1)}$  基础上, 用迭代法计算  $P-\Delta$  效应位移增量(挠曲二阶位移增量用系数( $\alpha + \beta_i$ )体现). 其第 1, 2, ...,  $n$  次的计算分别为

$$(\delta\Delta)_1 = (\zeta - 1) \Delta^{(1)},$$

(23)

$$(\delta\Delta)_2 = (\zeta - 1)^2 \Delta^{(1)},$$

(24)

$$(\delta\Delta)_n = (\zeta - 1)^n \Delta^{(1)}.$$

(25)

在上式中,  $\Delta^{(1)}$ ,  $(\delta\Delta)_1$ ,  $(\delta\Delta)_2$ , ...,  $(\delta\Delta)_n$  构成等比数列为

$$\Delta^{(2)} = \Delta^{(1)} + (\delta\Delta)_1 + \dots + (\delta\Delta)_n = \Delta^{(1)} / (2 - \zeta),$$

(26)

式中  $\Delta^{(2)}$  为结构  $i$  层二阶效应位移. 当  $\zeta \geq 2$  时上述数列发散, 结构弹性失稳.

2.3 算例

一幢 10 层钢筋混凝土框架受图 3 所示的水平力作用, 顶层重力荷载为 4.78 kPa, 标准层为 5.747 kPa, 1 个开间宽度 9.14 m. 一阶分析层间位移及层间抗推刚度, 本文方法计算出的二阶层间位移, 如表 1 所示. 表中,  $\Delta^{(1)}$  为结构一阶层间位移,  $\Delta^{(2)}$  为本文方法计算出的结构二阶层间位移,  $\Delta^*$  为二阶层间位移精确解,  $\delta_i$  为本文方法解与精确解的相对误差<sup>[6,6]</sup>.

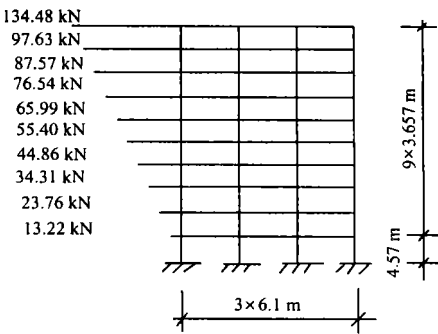


图 3 10 层框架简图

表 1 一阶及二阶分析层间位移及其它数据列表

层号	$h_i/\text{m}$	$P_i/\text{kN}$	$D_i/\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$	$\Delta_i^{(1)}/\text{mm}$	$\Delta_i^{(2)}/\text{mm}$	$\Delta_i^*/\text{mm}$	$\delta_i/(\%)$
10	3.657	801	10 242	13.13	13.46	13.56	0.70
9	3.657	1 762	12 422	18.69	19.55	19.51	0.20
8	3.657	2 723	16 010	19.94	21.03	20.95	0.38
7	3.657	3 684	17 176	23.04	24.58	24.46	0.49
6	3.657	4 645	20 225	22.83	24.47	24.36	0.45
5	3.657	5 607	22 271	23.22	25.03	24.90	0.52
4	3.657	6 568	26 399	21.29	22.93	22.88	0.22
3	3.657	7 529	27 082	22.02	23.88	23.75	0.54
2	3.657	8 490	31 782	19.51	21.10	21.01	0.43
1	4.572	9 451	32 593	19.43	20.84	20.77	0.34

3 结束语

本文综合刚度凝聚法和 Gramer 法则, 直接计算结构各层抗推刚度. 这主要是为了减少计算误差, 使本文方法能针对剪-弯型和弯曲型变形结构. 实际操作也可用其它方法, 确定抗推刚度. 但是, 需要注意抗推刚度区别不同水平荷载作用, 不然对剪-弯型和弯曲型变形结构计算误差可能较大.

用修正固端弯矩  $C_{ab,i}$ ,  $C_{ba,i}$  计算  $P-\Delta$  效应位移. 扣除引起纯弯型变形的附加弯矩部分, 考虑  $P-\Delta$  效应使结构层节点相对转动的影响. 如果采用直接在式(10)加上层节点转角增量项、两固端弯矩和仍为  $P_i\Delta_i$ . 一方面不符合可叠加性, 另一方面层剪力计算时, 造成附加剪力计算没排除引起纯弯型变形的附加弯矩部分, 也就没法计算层节点相对转动影响. 所以修正固端弯矩是合理的. 本文同时考虑了  $P-\Delta$  效应和梁-柱效应, 实际上是一种半数值半解析解法.

## 参 考 文 献

- 1 Avigdor R. Stability of a shear wall structures[J]. J. Struct. Eng. 1988, 114(3): 707 ~ 716
- 2 徐 彬, 梁启智. 高层框筒结构二阶分析摄动法[J]. 华中理工大学学报(自然科学版), 2002, 101(2): 99 ~ 105
- 3 Wall-Dosson O P, Wang C K. Stability analysis of frameworks by matrix methods[J]. ASCE, 1968, 94 (ST7): 1 745 ~ 1 760
- 4 克拉夫 R W, 彭 津 J 著. 结构动力学[M]. 王光远等译. 北京: 科学出版社, 1981. 111 ~ 116
- 5 刘建新. 高层建筑  $P-\Delta$  效应实用算法[J]. 建筑结构, 1995, (2): 38 ~ 41
- 6 黄庆丰. 框架结构二阶位移实用计算[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2002, 23(1): 40 ~ 44

# Numerical Solution to Second-Order Displacement of Frame Structure

Huang Qingfeng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** The stiffness matrix of elastic translation and the equilibrium equation of horizontal movement of frame structure are obtained by applying the method of static condensation. The antithrust stiffness of each storey of the structure is determined by applying Gramer rule. On this basis, second-order displacement is calculated according to equation of corner displacement, principle of superposition and iteration. An analysis is given to the influence of  $P-\Delta$  effect-induced corner change in structural storey on relative storey displacement. The reckoning of this solution approaches the precise solution with an error about 0.5%. It is good in usability, small in amount of calculation, and easy of realization

**Keywords** frame structure, static condensation, second-order displacement, turning corner of storey