

文章编号 1000-5013(2002) 04-0327-05

抛物型方程的一族双参数高精度恒稳格式

曾 文 平

(华侨大学数学系, 泉州 362011)

摘要 对抛物型方程, 构造一族含双参数的三层高精度隐式差分格式. 在特殊情况下, 当参数 $\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = 0$ 时, 得到一个两层格式. 同时, 证明该族格式对任意非负参数都是绝对稳定的, 并且其截断误差阶为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$. 数值例子表明, 该族格式是有效的, 且理论分析与实际计算相吻合.

关键词 抛物型方程, 高精度, 绝对稳定, 差分格式

中图分类号 O 241. 82

文献标识码 A

众所周知, 人们对抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分解法的研究由来已久. 常见的差分格式^[1], 诸如 Laasonen, Crank-Nicholson 和 Du fort-Frankel 等格式, 虽都是绝对稳定的, 但它们截断误差阶均较低. 前两种分别是 $O((\Delta t) + (\Delta x)^2)$, $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$; 后者为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2)$, 它当 $\Delta t = \Delta x$ 时还失去了相容性. 因此, 欲获得高精度的解时, 时间及空间步长必需取得足够小, 这就大大增加了计算工作量和存储量. 文 [2] 构造了一族截断误差阶达 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ 的隐式差分格式, 改进了已有的结果. 本文构造了一族三层(特殊情况下为两层)含双参数、高精度的隐式差分格式, 其截断误差阶为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$, 比常见格式精度高二~四阶, 进一步改进了文 [2] 的结果. 当参数 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ 时, 得到一个两层高精度的差分格式. 同时, 证明了该族差分格式, 对任意选取的非负实参数 $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ 都是绝对稳定的. 数值例子表明, 本文所提格式是有效的, 理论分析与实际计算相吻合.

1 差分格式的构造

考虑抛物型方程周期初值问题

收稿日期 2002-06-09

作者简介 曾文平(1940-), 男, 教授

基金项目 国务院侨务办公室自然科学基金资助项目

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in R, \quad t > 0), \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in R), \\ u(x+L, t) &= u(x, t) \quad (x \in R, \quad t \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

当 $f(x)$ 足够光滑时, 问题(1)的解存在且唯一. 现设问题(1)的解 $u(x, t)$ 充分光滑, 使得如下关系式成立. 即

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial t^q} = \frac{\partial^{p+2q} u}{\partial x^{p+2q}} \quad (p, q = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

设时间步长为 Δt , 空间步长为 Δx , 网格区域由点集 (x_j, t_n) ($j = 0, 1, 2, \dots, J; n = 0, 1, \dots$) 所组成, 其中 $x_j = j\Delta x, t_n = n\Delta t, \Delta x = L/J$. 设 $r = \Delta t / (\Delta x)^2$, 在网点 (x_j, t_n) 处的网格函数 $u(x_j, t_n)$ 记为 u_j^n .

对抛物型方程(1), 提出如下的三层双参数隐式差分格式为

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{240\Delta t} \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\alpha u_{j+2}^n + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right\} + \\ & \frac{1}{10\Delta t} \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2\alpha u_{j+1}^n + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right\} + \\ & \frac{97}{120\Delta t} \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) u_j^{n+1} - 2\alpha u_j^n + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) u_j^{n-1} \right\} + \\ & \frac{1}{10\Delta t} \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2\alpha u_{j-1}^n + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right\} - \\ & \frac{1}{240\Delta t} \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\alpha u_{j-2}^n + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right\} = \\ & \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta \right) \frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta \right) \frac{\delta_x^2 u_j^n}{(\Delta x)^2} + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + \beta \right) \frac{\delta_x^2 u_j^{n-1}}{(\Delta x)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\delta_x^2 u_j^n = u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n$ 为关于 x 的二阶中心差分. 初边值条件处理从略. 差分格式(2)的实参数偶 (α, β) 为非负实数偶. 对于参数偶的不同选取, 便可得到不同的差分格式.

特别地, 当 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ 时得到一个两层隐格式为

$$\begin{aligned} & - (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + (24 - 120r)(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + (194 + 240r)u_j^{n+1} = \\ & - (u_{j+2}^n + u_{j-2}^n) + (24 - 120r)(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (194 - 240r)u_j^n. \end{aligned} \quad (4)$$

2 截断误差的讨论

对于抛物型方程(1), 差分格式(3)的截断误差阶可达 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$, 下面给予推导. 我们记

$$D_t(\alpha, j) = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) u_j^{n+1} - 2\alpha u_j^n + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) u_j^{n-1} \right\} \quad (5)$$

及

$$\tau(n) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \delta_x^2 u_j^n \quad (6)$$

于网格点 $(j \Delta x, \Delta t)$ 处进行 Taylor 展开得

$$D_t(\alpha, j) = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O((\Delta t)^3) \quad (7)$$

及

$$\zeta(n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{360}(\Delta x)^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{1}{20160}(\Delta x)^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + O((\Delta x)^8). \quad (8)$$

利用关系式(2), 并进一步进行 Taylor 展开, 可得式(3)左端为

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{240}(D_t(\alpha, j+2) + D_t(\alpha, j-2)) + \\ & \frac{1}{10}(D_t(\alpha, j+1) + D_t(\alpha, j-1)) + \frac{97}{120}D_t(\alpha, j) = \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2} + \alpha \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{360}(\Delta x)^4 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4} + \frac{\alpha}{12}\Delta t(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} - \\ & \frac{1}{2160}(\Delta x)^6 \frac{\partial^5 u}{\partial x^6} + \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{360}\Delta t(\Delta x)^4 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4} + \\ & O((\Delta t)^3 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^8). \end{aligned} \quad (9)$$

而式(3)的右端, 则为

$$\begin{aligned} & (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta)\zeta(n+1) + (\frac{1}{2} - \beta)\zeta(n) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + \beta)\zeta(n-1) = \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2} + \alpha \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{360}(\Delta x)^4 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4} + \frac{\alpha}{12}\Delta t(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} + \\ & \frac{1}{20160}(\Delta x)^6 \frac{\partial^5 u}{\partial x^6} + (\frac{1}{4} + \beta)(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{360}\Delta t(\Delta x)^4 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4} + \\ & O((\Delta t)^3 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^8). \end{aligned} \quad (10)$$

因此, 差分格式(3)的截断误差 = 式(9) - 式(10) = $-(\frac{1}{12} + \beta)(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{31}{60480}(\Delta x)^6 \frac{\partial^5 u}{\partial x^6} + O((\Delta t)^3 + (\Delta t)^2(\Delta x)^2 + O(\Delta x)^8)$. 由于 $(\Delta t)^2$ 和 $(\Delta x)^6$ 的系数对任何 $\alpha, \beta \neq 0$ (此为稳定性条件的 α, β 均不等于0, 故格式(3)的截断误差阶只能为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$), 不可能更高.

3 稳定性分析

为研究差分格式的稳定性, 需如下的 Miller 准则.

引理^[6] 设 $A > 0$, 实系数二次方程

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (11)$$

的两根按模小于或等于1的充要条件为

$$A - C \geq 0, \quad A + B + C \geq 0 \quad \text{且} \quad A - B + C \geq 0.$$

现用 Fourier 方法^[6], 分析差分格式(3)的稳定性. 首先我们有

$$e^{-i\theta} \alpha_x^2 e^{i\theta} = -4\sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{i\eta}{2} - 4S^2 \quad (|\theta| < \pi),$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $S = \sin \frac{\theta}{2}$. 又令

$$F = \frac{1}{120}\cos \theta + \frac{1}{5}\sin \theta + \frac{97}{120} =$$

$$1 - \frac{1}{3}S^2 - \frac{1}{15}S^4. \quad (12)$$

由于 $0 < S^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2} < 1$, 故 $0 < F < 1$.

按文[4]中理论, 差分格式(3)的传播矩阵为

$$G(j, \Delta t) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A} & -\frac{C}{A} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其特征方程为形如式(11)的实系数二次方程, 其中

$$\left. \begin{aligned} A &= (\alpha + \frac{1}{2})F + 4(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta)rS^2, \\ B &= -2\alpha F + 4(\frac{1}{2} - 2\beta)rS^2, \\ C &= (\alpha - \frac{1}{2})F + 4(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta)rS^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

如上所述, $F > 0$. 所以, 对任意选取的非负参数 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 及 $r > 0$, 都有 $A > 0, A - C = F + 4\alpha rS^2 > 0, A + B + C = 4rS^2 > 0, A - B + C = 4\alpha F + 16\beta rS^2 > 0$. 因此, 引理条件成立. 由引理结论可知, 特征方程两根按模小于或等于 1. 同时, 由于 $A - C > 0$, 故不可能有等于 1 的重根. 因此, 我们有如下定理

定理 对任何非负参数 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 抛物型方程周期初值问题(1)的差分格式(3)绝对稳定. 特别地, 格式(4)也是绝对稳定的.

4 数值例子

解抛物型方程周期初值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0), \\ u(x, 0) &= \sin x \quad (-\infty < x < +\infty), \\ u(x + 2\pi, t) &= u(x, t) \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其精确解为

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x. \quad (16)$$

利用格式(4)及 C-N 格式进行计算, 其初边界条件按自然转移法. 定义在点 (x_j, t_n) 年的误差 $E_j^n = u(x_j, t_n) - u_j^n$, 其中 $u(x_j, t_n)$ 及 u_j^n 分别为精确解及差分格式解在 (x_j, t_n) 处的值. 取 $\Delta x = \frac{\pi}{32}, r = \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \Delta t = r(\Delta x)^2$ 进行计算到 $n = 500$, 列出数值误差比较表如表 1 所示.

表 1 数值误差比较表

r	格式	x			
		$\frac{5}{32}\pi$	$\frac{13}{32}\pi$	$\frac{21}{32}\pi$	$\frac{29}{32}\pi$
$\frac{1}{2}$	C-N 格式	$-8.183\,057 \times 10^{-5}$	$-1.661\,169 \times 10^{-4}$	$-1.530\,942 \times 10^{-4}$	$-5.039\,105 \times 10^{-5}$
$\frac{1}{2}$	格式(4)	$1.974\,591 \times 10^{-7}$	$4.008\,382 \times 10^{-7}$	$3.693\,992 \times 10^{-7}$	$1.215\,597 \times 10^{-7}$

续表

r	格式	x			
		$\frac{5}{32}\pi$	$\frac{13}{32}\pi$	$\frac{21}{32}\pi$	$\frac{29}{32}\pi$
1	C-N 格式	$-1.461\,314\times 10^{-5}$	$-2.966\,482\times 10^{-5}$	$-2.733\,926\times 10^{-5}$	$-8.998\,728\times 10^{-5}$
	格式(4)	$1.419\,735\times 10^{-7}$	$2.882\,072\times 10^{-7}$	$2.656\,119\times 10^{-7}$	$8.742\,370\times 10^{-8}$
2	C-N 格式	$-2.295\,032\times 10^{-7}$	$-4.658\,939\times 10^{-7}$	$-4.293\,703\times 10^{-7}$	$-1.413\,274\times 10^{-7}$
	格式(4)	$9.169\,803\times 10^{-9}$	$1.861\,479\times 10^{-8}$	$1.715\,548\times 10^{-8}$	$5.646\,712\times 10^{-9}$
4	C-N 格式	$-2.640\,232\times 10^{-11}$	$-5.359\,705\times 10^{-11}$	$-4.939\,533\times 10^{-11}$	$-1.625\,849\times 10^{-11}$
	格式(4)	$4.777\,735\times 10^{-12}$	$9.698\,853\times 10^{-12}$	$8.938\,513\times 10^{-12}$	$2.942\,113\times 10^{-12}$

从表 1 可以看出, 本文所构造的格式(4)比 C-N 格式的误差精度高 $10^{-1}\sim 10^{-3}$. 数值结果表明, 我们所作的理论分析是正确的.

参 考 文 献

1 CaY ㄆEB B K 著. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎译. 北京: 科学出版社, 1963. 143~152
2 陈传淡, 林 群. 解抛物型方程的一族绝对稳定的差分格式[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1983, 22 (3): 275~280
3 Miller J J H. On the location of zeros of certain of polynomials with application to numerical analysis[J]. J. Inst. Math. Appls., 1971, 8: 394~406
4 Richtmyer R D, Morton K W. Difference method for initial-value problems[M]. 2nd ed. New York: Wi-
ley., 1967. 11~98

A Family of High Accurate and Steady Difference Schemes
with Double Parameters for Solving Parabolic Equations

Zeng Wenping

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A family of three layer implicit difference schemes of high accuracy with double parameters are constructed for solving parabolic equations. Under special circumstance when the parameter $\alpha=\frac{1}{2}$ and $\beta=0$, a two layer difference scheme is obtained. These schemes are proved to be absolutely stable for arbitrary non-negative parameter, and their truncation error is in the order of $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$. As shown by numerical example, the family of difference Schemes are effective and theoretical analysis of them coincides with practical calculation of them.

Keywords parabolic equation, high accuracy, absolutely stable, difference scheme