

求解对流占优方程的不完全插值有限元法

张新红

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要 针对具有边界层现象方程的特点, 用一种不完全插值有限元方法, 求解对流占优方程. 讨论刚度矩阵的特性和计算方法. 通过某一数值实验, 说明不完全插值有限元方法的有效性.

关键词 对流占优方程, 分层基, 有限元, 边界层

中图分类号 O 241. 82

文献标识码 A

考虑常系数对流占优方程

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon u'' + pu' + qu &= f(x) \quad (0 < x < 1), \\ u(0) &= 0, u(1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\epsilon > 0$ 是小参数, p, q 是常数, 且对流系数 p 远远大于扩散系数 ϵ . 方程(1)的形式虽然简单, 但由于对流系数远远大于扩散系数, 因此在边界附近解的变化速率很大. 在参数 ϵ 十分小的情况下要达到必要的精度须要求网络步长很小, 这不仅难以实现预计精度, 而且数值稳定性差. 在文[1]中, 我们用内插小波方法, 求解了当参数 ϵ 非常小时的对流占优方程.(1)从解的图形分布和计算结果可以看出, 方程(1)的解在 $[1, 1/2]$ 的区间内几乎是一条直线. 在接近 $x = 1$ 附近, 解的变化非常剧烈, 产生边界层. 因此, 如果在整个区域内用统一网格分划, 势必造成一定的浪费, 而且计算量很大. 针对具有边界层现象的方程这一特点, 本文用一种不完全插值有限元方法来求解对流占优方程(1).

1 不完全线性插值

1.1 分层基

为讨论方便, 这里只讨论一维情况, 对于二维以上空间可类似^[2]. 令 Ω 是一有限区间, 把区间 Ω 进行二等分, 我们得到分划 Ω_0 . 再二等分一次, 得到分划 Ω_1 . 连续二等分下去, 得到一系列嵌套分划 $\Omega_j (j = 1, 2, \dots)$, 其中 Ω_{j+1} 是由 Ω_j 二等分所得. 令 Λ_k 是分划 Ω_k 下的节点集合, V_k 是每个分划内线性插值函数组成的空间. 称 Λ_k 中的点为节点, V_k 中的函数为第 k 层的有限元函数. 显然, 我们有 $\Lambda_k \subseteq \Lambda_{k+1}, V_k \subseteq V_{k+1}$. 对于一给定的连续函数 u , 我们用 $I_k u \in V_k$ 表示 u 在 Ω_k 分划下的线性插值函数. 对于 $j < k, u \in V_k$, 内插运算把 u 在 Ω_k 的节点处的值复制到 Ω_j 中. 即对于 $j < k, (I_j u)(x) = (I_k u)(x), \forall x \in \Lambda_j; (I_j u)(x) = u(x), \forall x \in \Lambda_j - \Lambda_k$. 因此, 对于任意的函数 $u \in V_j$, 我们可表示为

$$u = I_0 u + \sum_{k=1}^j (I_k u - I_{k-1} u). \quad (2)$$

从式(2)可以看出, u 可以分解成对应不同尺度的快速衰减函数. $I_0 u$ 就是对应初始分划 Ω 的有限元空间函数, 而 $I_k u - I_{k-1} u$ 在 $k-1$ 层的所有节点处消失. 分层基函数如图1所示.

1.2 不完全线性插值

从分层基的介绍可以看, 对于空间 V_k , 其基函数的个数为 $2 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2^{k+1} + 1$. 若把它作为有限元空间的基函数, 所形成的有限元方程是非常庞大的, 而且其刚度阵是一满阵, 计算起来相当复杂. 对于描述具有边界层的对流占优方程来说, 其解只在边界附近变化很大, 内层部分变化比较缓慢. 因此, 可以选取分层基的一部分作为特殊基函数, 有针对性地处理问题. 对于边界层出现在右端点处的对流占优方程(左端点附近出现边界层的情形类似), 现阐述其部分分层基的取法. 为简单起见, 选取两端边值为零. 如图2所示, 我们从空间 V_0 的节点基函数开始, 空间 V_1 的部分分层基取为 V_0 的节点基函数和 V_1 的右半边节点基函数. 同样, V_k 的部分分层基是由第 $k-1$ 层的部分分层基和第 k 层的最右边(不包括端点)节点基函数组成.

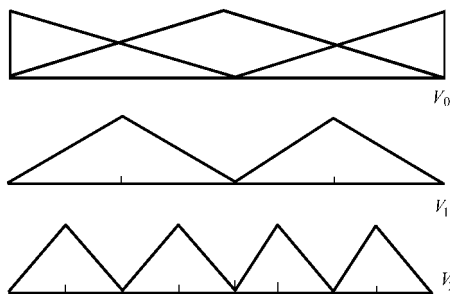


图1 分层基示意图

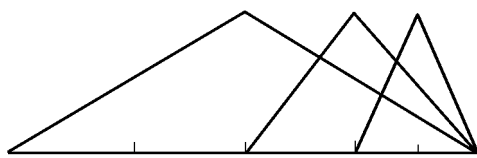


图2 不完全线性插值基函数示意图

2 基于不完全插值的有限元方法

我们用以上构造出来的部分分层基, 作为有限元函数的基底来求解对流占优方程(1). 取 Φ_0 为对应粗层的节点基函数, Φ_k 为第 k 层所取的节点基函数. 对于方程(1)的解区间 $[0, 1]$, 我们选取的部分分层基表达式为

$$\Phi(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x < 1/2), \\ 2(1-x), & (1/2 \leq x \leq 1), \\ 2^{i+1}x - 2(2^i - 1), & (2^i/2^{i+1} \leq x < (2^{i+1}-1)/2^{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots), \\ 2^{i+1}(1-x), & ((2^{i+1}-1)/2^{i+1} \leq x \leq 1) \quad (i = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

将有限元方法中的求解空间和检验函数空间取为 V_n . 以 $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)\}$ 为基函数, 设近似解为 $u(x) \in V_n$, 则 $u(x) = \sum_{k=0}^n C_k \Phi_k(x)$. 为了求得 $u(x)$, 只须考虑线性问题^[6]:

$$\forall v \in V_n, a(u, v) = (f, v), \quad (3)$$

其中

$$a(u, v) = (-\epsilon u + pu + qu)v dx = -\epsilon u v dx + p u v dx + q u v dx. \quad (4)$$

分别取 v 为 $\Phi_k, k = 0, 1, \dots, n$, 则由式(3)和式(4)可得

$$a(\Phi, \Phi) C_i = (f, \Phi) \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

也即, 其方程组为

$$MX = F, \quad (6)$$

其中 M 为刚度矩阵, X 为系数向量, F 为右端向量. 以下计算矩阵 M 的元素和右端项. 由式 (4), 矩阵 M 的元素可表示为

$$a(\Phi, \Phi) = -\epsilon(\Phi_i, \Phi_j) + p(\Phi_i, \Phi) + q(\Phi, \Phi). \quad (7)$$

$$(1) \text{ 计算式 (7) 的第一项 } (\Phi_i, \Phi_j). \text{ 当 } i=j \text{ 时, 有 } (\Phi_i, \Phi_j) = \frac{\frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}}}{2^i} 2^{i+1} \cdot 2^{i+1} dx +$$

$$\frac{1}{2^{i+1}} (2^{i+1}) (-2^{i+1}) dx = 2^{i+2}. \text{ 当 } i < j \text{ 时, 有 } (\Phi_i, \Phi_j) = \frac{\frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}}}{2^j} (-2^{i+1}) \cdot 2^{j+1} dx +$$

$$\frac{1}{2^{j+1}} (-2^{i+1}) \cdot (-2^{j+1}) dx = -2^{i+2} + 2^{j+2} = 0. \text{ 同样, 当 } i > j \text{ 时, } (\Phi_i, \Phi_j) = 0.$$

$$(2) \text{ 计算 } (\Phi_i, \Phi). \text{ 当 } i=j \text{ 时, 有 } (\Phi_i, \Phi) = \int_0^1 \Phi_i \Phi dx = \frac{\frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}}}{2^i} 2^{i+1} [2^{i+1}x - 2(2^i - 1)] dx$$

$$+ \frac{1}{2^{i+1}} (-2^{i+1}) \cdot 2^{i+1} (1-x) dx = 0. \text{ 当 } i < j \text{ 时, 有 } (\Phi_i, \Phi) = \frac{\frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}}}{2^j} (-2^{i+1}) [2^{j+1}x - 2(2^j - 1)] dx +$$

$$\frac{1}{2^{j+1}} (-2^{i+1}) [2^{j+1}(1-x)] dx = -2^{i-j}. \text{ 当 } i > j \text{ 时, } (\Phi_i, \Phi) = 2^{i-j}.$$

$$(3) \text{ 计算 } (\Phi, \Phi). \text{ 当 } i=j \text{ 时, 有 } (\Phi, \Phi) = \frac{\frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}}}{2^i} [2^{i+1}x - 2(2^i - 1)]^2 dx + \frac{1}{2^{i+1}} [2^{i+1}(1-x)]^2 dx =$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{-(i+1)} + \frac{1}{3} \cdot 2^{-(i+1)} = \frac{1}{3 \cdot 2^i}. \text{ 当 } i < j \text{ 时, 有 } (\Phi, \Phi) = \frac{\frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}}}{2^j} [2^{j+1}x - 2(2^j - 1)] \cdot$$

$$2^{j+1}(1-x) dx + \frac{1}{2^{j+1}} 2^{j+1}(1-x) \cdot 2^{j+1}(1-x) dx = \frac{\frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}}}{2^j} 2^{j+2}x(1-x) - 2^{i+2}(2^j - 1)(1-x) dx +$$

$$2^{i+j+2} \frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}} (1-x)^2 dx = 2^{i-j-1}. \text{ 当 } i > j \text{ 时, 由对称性, } (\Phi, \Phi) = 2^{j-2i-1}.$$

(4) 右端项的计算. 我们可以直接积分, 也可以利用中点 Gauss 求积公式

$$\int_{E_i} f(x) \Phi(x) dx = h_i f(\bar{x}_i) / 2, \text{ 其中 } \bar{x}_i = \frac{x_{i+} + x_{i+1}}{2}. \text{ 一般地, 所选的 Gauss 求积公式的精度应等}$$

于或略大于有限元解的精度即可.

3 刚度阵元素分布特点

用部分分层基作为有限元方法的基函数求解对流占优方程 (1), 所得线性方程的矩阵形式为 $MX = F$. 我们现分析刚度矩阵 M 的元素分布, M 中任一元素可表示为 $m_{ij} = a(\Phi, \Phi) =$

$-\epsilon(\Phi_i, \Phi_j) + p(\Phi, \Phi) + q(\Phi, \Phi)$. 因此, M 可写成 3 个矩阵的和, 即 $M = -\mathbf{CA} + \mathbf{pB} + \mathbf{qC}$. <http://www.cnki.net>

其中矩阵 A 由所有一阶导数的内积组成, B 由所有一阶导数和零阶导数的内积组成, C 为零阶导数的内积组成的矩阵. 由前面计算可以得到 A 为一对角阵, 即

$$A = \begin{bmatrix} 2^2 & & & & \\ & 2^3 & & & \\ & & 2^4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2^{n+2} \end{bmatrix} = 2^2 \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2^n \end{bmatrix}.$$

B 矩阵的对角线元素为 0, 从对角线开始向两边以 2 的指数幂衰减, 上三角中的元素为负数, 下三角中的元素为正数, 即

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2^{-1} & -2^{-2} & -2^{-3} & \dots \\ 2^{-1} & 0 & -2^{-1} & -2^{-2} & \dots \\ 2^{-2} & 2^{-1} & 0 & -2^{-1} & \dots \\ 2^{-3} & 2^{-2} & 2^{-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

C 为对称阵, 且对角线严格占优, 从对角线往两边衰减, 即

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2^{-3} & 2^{-5} & 2^{-7} & \dots \\ 2^{-3} & \frac{1}{3 \cdot 2} & 2^{-4} & 2^{-6} & \dots \\ 2^{-5} & 2^{-4} & \frac{1}{3 \cdot 2^2} & 2^{-5} & \dots \\ 2^{-7} & 2^{-6} & 2^{-5} & \frac{1}{3 \cdot 2^3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

因此, M 是一满阵. 但由于我们所取的是部分分层基, 所以刚度阵 M 的维数非常小. 如果近似空间为 V_n , 则矩阵维数只有 $n+1$, 其求解非常简便. 一般来说, n 取 10~15 就可以达到很好的精度. 此时的方程组的个数, 也只有 11~16 个.

4 数值实验及结果

应用本文构造的部分分层基作为有限元的基函数, 具体求解对流占优方程:

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon u + u &= 1 \quad (0 < x < 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

方程(8)在 $x=1$ 附近产生边界层. 其准确解的表达式为

$$u(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{\epsilon}}} + \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}}}{1 - e^{\frac{1}{\epsilon}}} + x = \frac{e^{\frac{x-1}{\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\epsilon}}}{e^{-\frac{1}{\epsilon}} - 1} + x.$$

我们选取解空间和检验函数空间为 V_n . V_n 是由分层基 $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)\}$ 组成, 取 $n=12$. 当 $\epsilon=0.1, 0.01, 0.001$ 时, 用不完全插值有限元法的近似解 $u_1(x)$ 和准确解 $u(x)$, 其计算结果及误差如表 1 所示. 解的图形分布从略. 表中当 $\epsilon=0.1$ 时, 对流作用明显地表现出来; 当

$\epsilon = 0.01$ 时, 出现边界层; 当 $\epsilon = 0.001$ 时, 原方程几乎化为方程 $au = f$.

表 1 方程(8)解的比较

坐 标 x	近似解 $u_1(x)$	精确解 $u(x)$	误 差
$\epsilon = 0.1$			
0.9			10^{-3}
0.953 125	$3.217\ 393 \times 10^{-1}$	$3.273\ 580 \times 10^{-1}$	$-5.618\ 653 \times 10^{-3}$
0.968 750	$2.382\ 288 \times 10^{-1}$	$2.371\ 466 \times 10^{-1}$	$1.082\ 283 \times 10^{-3}$
0.984 375	$1.295\ 144 \times 10^{-1}$	$1.290\ 362 \times 10^{-1}$	$4.781\ 741 \times 10^{-4}$
$\epsilon = 0.01$			
0.9			10^{-2}
0.953 125	$9.420\ 060 \times 10^{-1}$	$9.439\ 153 \times 10^{-1}$	$-1.909\ 280 \times 10^{-3}$
0.968 750	$9.427\ 183 \times 10^{-1}$	$9.248\ 131 \times 10^{-1}$	$1.790\ 519 \times 10^{-2}$
0.984 375	$7.836\ 560 \times 10^{-1}$	$7.747\ 636 \times 10^{-1}$	$8.887\ 010 \times 10^{-3}$
$\epsilon = 0.001$			
0.9			10^{-4}
0.953 125	$9.533\ 134 \times 10^{-1}$	$9.531\ 250 \times 10^{-1}$	$-1.883\ 627 \times 10^{-4}$
0.968 750	$9.691\ 490 \times 10^{-1}$	$9.687\ 500 \times 10^{-1}$	$3.990\ 270 \times 10^{-4}$
0.984 375	$9.842\ 599 \times 10^{-1}$	$9.843\ 748 \times 10^{-1}$	$-1.149\ 075 \times 10^{-4}$

我们从计算所得的结果可以看到, 近似解的逼近效果非常好, 并且在边界层附近解的描述效果更好.

参 考 文 献

1 张新红. 一种求解对流占优方程的内插小波方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1999, 20(3): 226 ~ 229

2 Zienciewics O C, Kelly D W, Gago J, et al. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement[A]. In: Whiteman J R, eds. The mathematics of finite element and applications IV [C]. London: Academics Press, 1982. 384 ~ 390

3 徐长发. 实用偏微分方程数值解法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1989. 146 ~ 159

Incomplete Interpolation-Based Finite Element Method
for Solving Convection-Dominated Equation

Zhang Xinhong

(College of Econo. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract As a phenomenological equation with the characteristic boundary layer, the convection-dominated equation is solved by Galerkin's method, namely, the finite element method based on incomplete interpolation. The characteristics of stiffness and the method of its computation are discussed. The effectiveness of this method is numerically exemplified.

Keywords convection-dominated equation, hierarchical basis, finite element, boundary layer