

启发搜索算法在运筹学中的应用

汤永清 张银明

(华侨大学信息科学与工程学院, 泉州 362011)

摘要 运筹学中的运输、指派问题具有广泛的应用性. 启发式的搜索算法的核心问题是构造启发函数, 用启发函数的思想去解决传统的运筹学问题, 可以提高求解的效率. 文中从启发式的搜索算法角度出发, 介绍了如何构造启发函数, 并用其解决运筹学中的运输与指派问题.

关键词 人工智能, 启发函数, 运筹学

中图分类号 TP 18 O 22

文献标识码 A

运筹学是一门系统科学. 运筹学是运用科学方法, 尤其是用数学方法去研究各种系统, 优化途径及方案, 为决策者提供科学决策的依据. 运筹学中有一类问题具有特殊性, 如运输问题、调运问题, 且有很多解决的方法. 其本质, 就是通过多次迭代获得一个最优分配解. 如对于运输问题, 解决方法较多地使用表上作业法的最小元素法. 分配问题多采用整数规划的匈牙利法. 分配问题可以认为是供需为1的运输问题的特例来处理.

1 启发式搜索算法

启发式的搜索算法广泛应用于人工智能, 是用来寻找最优解的一种方法. 它的本质是部分的放弃了算法“一般化、通用化”的概念, 把所要解的问题的具体领域内的知识加入到算法中去, 以提高算法的效率. 其基本原理是在搜索的过程中对遇到的新状态, 先利用估值函数得到1个估计值. 然后, 根据估计值的大小来, 确定下一步的状态将从哪一步开始继续前进, 以此来实行最佳优先搜索. 每一步的搜索都是根据估计值来判断下一步的搜索方向, 因此如何设计估值函数就成为问题求解的核心. 用数学公式描述, $f(x) = (1 - \alpha(x))g(x) + \alpha(x)h(x)$. 其中 $f(x)$ 代表估值函数, $g(x)$ 为从初始结点到 n 个结点的最小代价, $\alpha(x)$ 为权函数(可以是一个动态值, 也可以为常数, 一般情况下可以取值为1或0), $h(x)$ 表示从 n 结点到目标结点的最小代价, 也称之为启发函数.

目前比较流行的有两种方法. (1) 令 $h(x) = 0$, 即仅以已经花费的代价 $g(x)$ 来进行估计, 这有点接近于广度优先法. 它虽说能找到完备解, 但花费的工作量不一定是最小的. 这是因为它不利用任何启发式信息. (2) 与上一种完全相反, 不是舍弃 $h(x)$ 而是舍弃 $g(x)$, 即令 $f(x) = h(x)$. 这种方法的实质, 在于把解的最优性置于次要地位, 首先考虑的是如何尽快地求得一

个接近于最优解的解. 这种方法的使用对于简化程序, 提高算法的效率, 减少迭代的次数都很有帮助.

2 运筹学问题

分析一下, 传统的解决方法采用的是广度优先法. 令 $h(x) = 0$, 即仅以花费的代价 $g(x)$ 来进行初分配, 而完全放弃了启发式的方法. 整个求解过程只注重最优解的产生, 即它的完备性, 而忽略了其效率性. 如果在确定初始解的时候引入启发式函数的概念, 只需花费较小的时间、空间复杂度, 却可以获得意想不到的效果. 利用启发式搜索算法的关键在于如何构造启发函数. 下面介绍关于运输、调运问题启发函数的构造.

3 启发函数的构造

本文所构造的启发函数是用来对运输、调运的初始值的进行分配, 以期获得一个接近于最优解的初始解. 它结合启发式搜索算法的两种方法的优点, 在初始阶段用启发函数进行搜索. 当接近最优解时, 则放弃启发函数, 采用广度优先法进行搜索. 从而, 获得一个最优解(满意解), 以提高求解的效率. 下面介绍在构造启发函数之前的定义等问题.

3.1 定义

由第 i 个供应点调配给第 j 个需求点的待定变量 x_{ij} , 称为元素. 凡能排列成 $x_{ij}, x_{i,j+k}, x_{i+l,j+k}, x_{i+l,j}$ 的元素的集合, 就称之为一个回路. 在含有元素 x_{ij} 为顶点的回路中, 以 x_{ij} 为调入对象而调整一个单位运输量所引起的运费的增加或减少的数值, 称为 x_{ij} 在该回路中的检验数, 其值为 $\Delta_{ij} = C_{ij} - C_{i,j+k} + C_{i+l,j+k} - C_{i+l,j}$ (C_{ij} 表示元素 x_{ij} 的单位运费). 当 $\Delta_{ij} < 0$ 时, 令 $dx_{ij} = 1$, 即只统计负值. 其中 $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, dx_{ij} \in [0, (m-1)(n-1)]$.

3.2 构造 $h(x)$ 函数

根据上述的定义, 调运问题的启发函数可描述为

$$h(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n dx_{ij}.$$

3.3 基本思想

$\Delta_{ij} < 0$, 就意味着在该回路中 x_{ij} 元素所需花费的代价最小, 可以获得优先分配权. 为了衡量 x_{ij} 在整个分配表进行分配的优先级, 则需对该元素所有的回路进行遍历, 对其中所出现的负值进行求和. 根据 $h(x)$ 去权衡该元素能够得到分配的权值有多大, $h(x)$ 越大, 越优先分配, 从而取得分配优先权. 当供应量或需求量得到满足时, 该行或该列余下的元素就失去了分配的權利.

4 举例说明

为了证明问题的优越性, 现试举几个例子加以说明.

例1 如表1所示. 表中 x_{ij} 表示元素, 其后面相应的数值则代表该元素所对应的单位运费. 下面谈其解法. 一般的解法可以用最小元素法根据其运费的大小来分配, 运费小的先分配. 现采用了启发式函数来进行分配.

表 1 供需表

单位	A	B	C	D	供应量
甲厂	$x_{11}, 3$	$x_{12}, 11$	$x_{13}, 1$	$x_{14}, 10$	7
乙厂	$x_{21}, 1$	$x_{22}, 9$	$x_{23}, 2$	$x_{24}, 8$	4
丙厂	$x_{31}, 7$	$x_{32}, 4$	$x_{33}, 10$	$x_{34}, 5$	9
需求量	3	6	5	6	—

步骤 1. 根据表 1, 可以求得各启发函数值. 如对于元素 x_{11} 而言, 以其为起点构成的回路的 Δ 值为

$$\begin{aligned} x_{11} - x_{12} - x_{22} - x_{21}, & \quad 3 - 11 + 9 - 1 = 0; \\ x_{11} - x_{13} - x_{23} - x_{21}, & \quad 3 - 1 + 2 - 1 > 0; \\ x_{11} - x_{14} - x_{24} - x_{21}, & \quad 3 - 10 + 8 - 1 = 0; \\ x_{11} - x_{12} - x_{32} - x_{31}, & \quad 3 - 11 + 4 - 7 < 0; \\ x_{11} - x_{13} - x_{33} - x_{31}, & \quad 3 - 1 + 10 - 7 > 0; \\ x_{11} - x_{14} - x_{34} - x_{31}, & \quad 3 - 10 + 5 - 7 < 0. \end{aligned}$$

计算在 x_{11} 为起点的所有的回路中 Δ 值小于零的个数, 等于 3. 所以, $h(x_{11}) = 3$. 其它依此类推. 各启发函数值为

$$\begin{aligned} h(x_{11}) &= 3, & h(x_{12}) &= 1, & h(x_{13}) &= 6, & h(x_{14}) &= 1; \\ h(x_{21}) &= 3, & h(x_{22}) &= 1, & h(x_{23}) &= 1, & h(x_{24}) &= 2; \\ h(x_{31}) &= 2, & h(x_{32}) &= 6, & h(x_{33}) &= 0, & h(x_{34}) &= 4. \end{aligned}$$

步骤 2. 根据启发函数值的大小, 越大的分配优先级越高. 如 x_{13} 的分配优先级最高, 先对其进行分配, 取 $\min(5, 7)$. 由于 x_{13} 所在的列, 即此列的需求量已得到满足, 该列的别的元素就失去了分配权. 其它依此类推. 可得分配的先后顺序为 $x_{13}, x_{32}, x_{34}, x_{21}, x_{24}, x_{14}$.

表 2 分配表

单位	A	B	C	D	供应量
甲厂	—	—	5	2	7
乙厂	3	—	—	1	4
丙厂	—	6	—	3	9
需求量	3	6	5	6	—

步骤 3. 分配的结果, 如表 2 所示. 表中解, 代表其所能分配到的值. 经分析总运费为 75, 且 1 次分配即得最优解. 而若采用最小元素法来分配, 则需调整 2 次才可以得到最优解.

例 2 如 6×10 极小化平衡运输问题. 其供应量为

$$75, \quad 85, \quad 180, \quad 135, \quad 85, \quad 85.$$

其需求量为

$$100, \quad 100, \quad 80, \quad 75, \quad 60, \quad 15, \quad 20, \quad 90, \quad 70, \quad 35.$$

其单位运价为

$$\begin{aligned} & 10, \quad 6, \quad 20, \quad 11, \quad 15, \quad 6, \quad 20, \quad 7, \quad 10, \quad 15, \\ & 6, \quad 20, \quad 35, \quad 15, \quad 25, \quad 12, \quad 17, \quad 15, \quad 20, \quad 9, \\ & 19, \quad 8, \quad 11, \quad 6, \quad 13, \quad 17, \quad 15, \quad 14, \quad 40, \quad 20, \\ & 17, \quad 18, \quad 21, \quad 23, \quad 7, \quad 21, \quad 9, \quad 16, \quad 22, \quad 12, \\ & 80, \quad 75, \quad 35, \quad 15, \quad 17, \quad 8, \quad 13, \quad 10, \quad 25, \quad 11, \\ & 30, \quad 40, \quad 35, \quad 10, \quad 18, \quad 13, \quad 30, \quad 17, \quad 13, \quad 11. \end{aligned}$$

使用启发函数 $h(x)$ 进行求解, 可以得到初始解为

$$x_{11} = 15, \quad x_{12} = 60, \quad x_{21} = 85, \quad x_{32} = 40, \quad x_{33} = 80, \quad x_{34} = 60, \\ x_{45} = 60, \quad x_{47} = 20, \quad x_{48} = 20, \quad x_{4,10} = 35, \quad x_{56} = 15, \quad x_{58} = 70, \quad x_{64} = 15, \quad x_{69} = 70.$$

经验证为非优解后, 用回路法进行调整. 经过 2 次调整其分配方案为

$$x_{12} = 60, \quad x_{18} = 15, \quad x_{21} = 85, \quad x_{32} = 40, \quad x_{33} = 80, \quad x_{34} = 60, \quad x_{41} = 15, \quad x_{45} = 60, \\ x_{47} = 20, \quad x_{48} = 5, \quad x_{4,10} = 35, \quad x_{56} = 15, \quad x_{58} = 70, \quad x_{64} = 15, \quad x_{69} = 70.$$

经验证为最优解. 利用启发函数最优解的获得, 只需经过 2 次调整便可. 同一个问题用最小元素法进行初值分配, 后采用内点算法进行调整. 那么, 经过 554 次的迭代才得到最优解. 以上的算法都已用 DELPHI 编程实现.

5 结束语

利用启发函数, 本质就是在对起始解的处理上融入了对一类求解问题的专家知识. 其核心是在对问题的理解上如何去构造启发函数, 引导问题从最有效的途径去得到最优解. 一个好的启发函数, 可以较有效地找到最接近于最优解的起始解, 甚至是最优解. 它能减少迭代次数, 提高算法的效率, 尤其对于大型的问题的求解更能体现其优越性. 虽然本文介绍的是对于运筹学的运输、调运问题的求解过程, 但其中所涉及的思想却具有普遍的适用性.

参 考 文 献

- 1 张银明. 调运、指派和货郎担问题的通用研究——算法设计及程序实现[J]. 计算机工程与应用, 1996, (1): 26~31
- 2 运筹学教材编写组编. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994. 81~82
- 3 陆汝钤. 人工智能[M]. 北京: 科学出版社, 1989. 259~272
- 4 Nils N 著. 人工智能[M]. 潘云鹤等译. 北京: 机械工业出版社, 2000. 84~88
- 5 汤代焱. 管理运筹学[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 1997. 62~63

Application of Heuristic Search Algorithm to Operational Research

Tang Yongqing Zhang Yingming

(College of Info. Sci. & Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract In operational research, issues of transportation and assignment have extensive application. To construct heuristic function is the core of heuristic search algorithm. To solve conventional issues of operational research by using the idea of heuristic function will promote the efficiency of solving. From the angle of heuristic search algorithm, the authors give the details on how to construct heuristic function and how to use it for solving issues of transportation and assignment in operational research.

Keywords artificial intelligence, heuristic function, operational research