

文章编号 1000-5013(2002) 03-0293-07

CNC 雕刻机平面并联机构的运动学设计

郑亚青 刘雄伟

(华侨大学机电与自动化学院, 泉州 362011)

摘要 提出一种新型三坐标 CNC 雕刻机的概念设计. 该雕刻机采取平面并联机构实现 X, Y 方向进给运动, 而安装在该机构末端的串联主轴实现 Z 向进给运动. 针对该平面并联机构, 研究基于总体灵活度的运动学设计方法, 指出运动学设计问题可归结为以全局运动性能指标最大为目标的单目标、有约束的优化设计问题. 同时, 利用随机方向法搜索到一个最优解, 通过实例分析进行验证. 结果表明, 提出的方法是可行的, 可用于样机的开发.

关键词 平面并联机构, 运动学, 雕刻机, 计算机数控

中图分类号 TH 112 TG 659 TH 113 文献标识码 A

平面闭链五杆机构, 是最简单的双自由度平面并联机构. 对于它在混合机械系统中的应用, 文献 [1] 深入地分析了其全局运动性能, 文献 [2, 3] 利用其实现精确轨迹和函数的输出. 但在轻型数控机床中的应用, 上述研究并没有深入分析其运动性能. 在运动学设计方面, 文献 [4, 5] 研究了兼顾工作空间面积和可控灵活度的设计方法. 针对文献 [6] CNC 双摇臂雕刻机的不足之处, 本文提出了基于平面并联五杆机构的三坐标 CNC 雕刻机设计方案, 研究一种基于总体灵活度的运动学设计方法. 该方法将运动学设计问题归结为, 以全局运动性能指标最大为目标的单目标有约束的优化设计问题, 并利用随机方向法搜索到一个最优解.

1 总体设计

图1为基于平面并联机构CNC雕刻机, 图2为其三维CAD模型原理图. 驱动杆 L_1 和

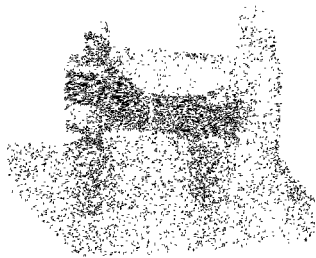


图 1 基于平面并联机构的 CNC 雕刻机

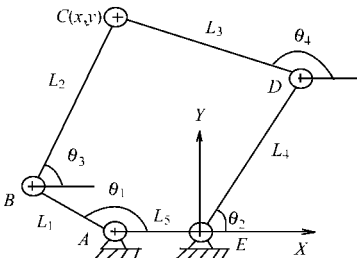


图 2 平面并联机构原理图

L_4 在固定端 A 和 E , 分别由各自的伺服电机驱动, 并经谐波减速器减速. 另一端分别与连杆 L_2 和 L_3 相连, L_2 和 L_3 的另一端铰合在 C 点, 并在 C 点安装 Z 轴. 驱动电机安装在顶部, 通过丝杠带动主轴上下运动, 实现雕刻机的三坐标运动. 其结构特点是 M_1, M_2 两个驱动伺服电机固定. 这不仅有利于设计减速系统, 而且雕刻机的刚度将比文献 [6] 的双摇臂结构的刚度大大提高. 由图 2 可以看出, 该平面并联机构的自由度为 $F = 3 \times (5 - 5 - 1) + 5 \times 1 = 2^{[7]}$.

2 运动学设计原理

2.1 位置逆解模型

位置逆解问题: 已知并联机构结构尺度参数 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 , 以及终端位置(即刀具中心) C 的位置 (x, y) , 求两个驱动杆 L_1, L_4 的转角 θ_1 和 θ_2 . 求解位置逆解有 2 个目的. (1) 已知 CAM 模型后, 通过粗插补为伺服控制提供输入. (2) 为基于全局运动性能指标的尺度综合提供数学模型. 下面对实现 X, Y 方向进给运动的平面并联机构进行运动学分析, 其机构简图如图 2 所示. 刀具中心 C 的位置 (x, y) , 可表示为

$$\left. \begin{aligned} x &= -L_5 + L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_3 = L_4 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_4, \\ y &= -L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_3 = L_4 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_4. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由式(1)可推导出

$$x + L_5 - L_1 \cos \theta_1 = L_2 \cos \theta_3, \quad y - L_1 \sin \theta_1 = L_2 \sin \theta_3. \quad (2)$$

由式(2), 可得

$$L_1^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_2^2 - 2L_1(x + L_5) \cos \theta_1 - 2yL_1 \sin \theta_1 = 0.$$

令 $A = -2L_1(x + L_5)$, $B = -2yL_1$, $C = L_1^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_2^2$, 则有

$$A \cos \theta_1 + B \sin \theta_1 + C = 0. \quad (3)$$

令 $T = \tan \frac{\theta}{2}$, 则 $\sin \theta = \frac{2T}{1+T^2}$, $\cos \theta = \frac{1-T^2}{1+T^2}$. 代入式(3), 可得 $T = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + A^2 - C^2}}{C - A}$. 则 $\theta_1 = 2 \arctan T$ 或 $\theta_1 = \pi + 2 \arctan T$, 所以 θ_1 共有四组解. 同理, 可求出 θ_2, θ_3 和 θ_4 . 因为并联机构的位置逆解是唯一的, 取哪一组解取决于并联机构的安装模式和初始位置. 对于图 1 所示的安装模式, 经推导验证, 并联机构的初始位置发生改变时, 末端执行器 C 处于不同的区域, 这时位置逆解也不一样. 若仅考虑使末端执行器 C 处于 $y > 0$ 区域的初始位置, 则可以分为 3 个区域.

(1) 区域 1 ($x < 0, y > 0$). $\theta_1 = \arcsin \frac{y}{(x + L_5)^2 + y^2} + \arccos \frac{L_1^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_2^2}{2L_1((x + L_5)^2 + y^2)}$,
 $\theta_2 = \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} - \arccos \frac{L_4^2 + x^2 + y^2 - L_3^2}{2L_4(x^2 + y^2)}$, $\theta_3 = \arcsin \frac{y}{(x + L_5)^2 + y^2} - \arccos \frac{L_2^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_1^2}{2L_2((x + L_5)^2 + y^2)}$, $\theta_4 = \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} + \arccos \frac{L_3^2 + x^2 + y^2 - L_4^2}{2L_3(x^2 + y^2)}$. (2) 区域 2 ($x < -L_5, y > 0$). $\theta_1 = \arcsin \frac{y}{(x + L_5)^2 + y^2} + \arccos \frac{L_1^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_2^2}{2L_1((x + L_5)^2 + y^2)} + \pi$, $\theta_2 = \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} - \arccos \frac{L_4^2 + x^2 + y^2 - L_3^2}{2L_4(x^2 + y^2)} + \pi$, $\theta_3 = \arcsin \frac{y}{(x + L_5)^2 + y^2} - \arccos \frac{L_2^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_1^2}{2L_2((x + L_5)^2 + y^2)}$, $\theta_4 = \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} + \arccos \frac{L_3^2 + x^2 + y^2 - L_4^2}{2L_3(x^2 + y^2)}$.

$$\arccos \frac{L_2^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_1^2}{2L_2 \sqrt{(x + L_5)^2 + y^2}} + \pi, \theta_1 = \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} + \arccos \frac{L_3^2 + x^2 + y^2 - L_4^2}{2L_3 \sqrt{x^2 + y^2}} + \pi. \quad (3) \text{ 区域}$$

$$3(-L_5 < x < 0, y > 0). \theta_1 = \arcsin \frac{y}{(x + L_5)^2 + y^2} + \arccos \frac{L_1^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_2^2}{2L_1 \sqrt{(x + L_5)^2 + y^2}}, \theta_2 =$$

$$\arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} - \arccos \frac{L_4^2 + x^2 + y^2 - L_3^2}{2L_4 \sqrt{x^2 + y^2}} + \pi, \theta_3 = \arcsin \frac{y}{(x + L_5)^2 + y^2} -$$

$$\arccos \frac{L_2^2 + (x + L_5)^2 + y^2 - L_1^2}{2L_2 \sqrt{(x + L_5)^2 + y^2}}, \theta_4 = \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} + \arccos \frac{L_3^2 + x^2 + y^2 - L_4^2}{2L_3 \sqrt{x^2 + y^2}} + \pi.$$

2.2 全局运动性能分析

Gosselin 定义并联机构的全局运动性能指标为, 雅可比条件数在整个工作空间内的积分值除以工作空间的面积^[6]. 假定 η 表示全局运动性能指标, 则

$$\eta = A/B, \quad (4)$$

$$A = \int_W \frac{1}{k} dW, \quad B = \int_W dW. \quad (5)$$

上式中, k 为工作空间 W 内给定位置时的雅可比条件数, dW 为工作空间的微面积, B 为工作空间的面积. 雅可比条件数定义为

$$k = \frac{J}{J^{-1}}. \quad (6)$$

k 是并联机构的一种局部性能, 仅反映工作空间内某一特定位置的机构运动控制精度. k 值越大, 表示精度越低. 而 J 为并联机构的雅可比矩阵, $J = [\text{tr}(JN J^T)]$, $N = I/n$, I 为二阶单位矩阵, n 为方阵 J 的维数. η 反映了在整个工作空间内并联机构的总体运动控制精度. 由于 $k \geq 1$, 故 $0 < 1/k \leq 1$, $0 < \eta < 1$. η 值越大, 表示并联机构越能实现精确的控制. 图 2 的平面并联机构, J 由速度正解方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \text{ 求出. 令 } J = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$j_1 = \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{\text{tg} \theta_4 l_1 (\text{tg} \theta_3 \cos \theta_1 - \sin \theta_1)}{\text{tg} \theta_4 + \text{tg} \theta_3}, \quad j_2 = \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = \frac{\text{tg} \theta_3 l_4 (\text{tg} \theta_4 \cos \theta_2 - \sin \theta_2)}{\text{tg} \theta_4 + \text{tg} \theta_3},$$

$$j_3 = \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{l_1 (\sin \theta_1 - \text{tg} \theta_3 \cos \theta_1)}{\text{tg} \theta_4 + \text{tg} \theta_3}, \quad j_4 = \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{l_4 (\sin \theta_2 - \text{tg} \theta_4 \cos \theta_2)}{\text{tg} \theta_4 + \text{tg} \theta_3},$$

$$\frac{1}{k} = \frac{j_1 j_4 - j_2 j_3}{2 \times (j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_4^2)} = \frac{2 k_1 - k_2}{(k_3 + k_4)}. \quad (7)$$

式(7)中, $k_1 = \text{tg} \theta_4 (\text{tg} \theta_3 \cos \theta_1 - \sin \theta_1) (\sin \theta_2 - \text{tg} \theta_4 \cos \theta_2)$, $k_2 = \text{tg} \theta_3 (\text{tg} \theta_4 \cos \theta_2 - \sin \theta_2) (\sin \theta_1 - \text{tg} \theta_3 \cos \theta_1)$, $k_3 = (l_4/l_1) (1 + \text{tg}^2 \theta_4) (\sin \theta_1 - \text{tg} \theta_3 \cos \theta_1)^2$, $k_4 = (l_4/l_1) (1 + \text{tg}^2 \theta_3) (\sin \theta_2 - \text{tg} \theta_4 \cos \theta_2)^2$. 由式(4), (5), (6), 可以得到平面并联机构的全局运动性能指标 η . 由于式(7)是复合函数, 故全局运动性能 η 的求解, 只能用离散的方法求得.

2.3 基于最优全局运动性能指标 η 的工作空间综合

基于最优 η 的工作空间综合, 是基于平面并联机构的 CNC 雕刻机运动学设计的核心内容. 其目的是以实现运动终端位置能力(运动范围), 确保全局最佳运动控制精度目标, 确定所有杆 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 的长度, 以及工作台的位置.

2.3.1 工作空间面积 W 的确定 若不考虑转角 θ_3 和 θ_4 的限制, 图 2 所示的平面并联机构运

动终端 C 可达工作空间可视为支链 L_1, L_2 和支链 L_3, L_4 运动终端的工作空间 W_1 和 W_2 的交集 $W = W_1 \cap W_2$, 如图 3 所示. 这里, $W = Q_1 \cap Q_2$. 各杆长发生变化时, 工作空间的形状也随之变化. 由于铰链转角 θ_3 和 θ_4 受到 θ_1 和 θ_2 的限制, 工作空间的边界难以解析表达. 本文采用一种数值近似 Monte-Carlo 方法^[8]来确定工作空间的面积. 其工作空间计算有 5 个步骤. (1) 用边长 $ll = 2 \times \max(L_3 + L_1 + L_2)$ 的一个矩形(其中心与平面并联机构的笛卡尔坐标系原点重合), 来定义全部可能的工作空间. (2) 从矩形中随机选择大量的点(点的数量为 $n_{\text{total}} = ll^2$ (个)). (3) 测试所选的每个点是否落在工作空间内. 这可通过用平面并联机构的位置逆解方程式(1)来实现. 若每个点的坐标值 (x, y) 代入式(1)后, 得出的转角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 都是实数, 则该点就落在工作空间内; 否则, 该点就落在其外. (4) 计算落在工作空间的内的点数 n_m . (5) 工程空间的面积

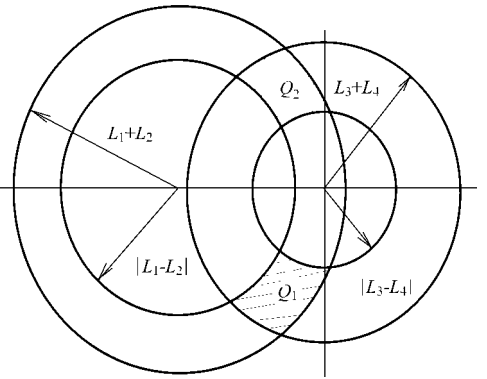


图 3 平面并联机构的可达工作空间

积为 $W = \frac{n_m}{n_{\text{total}}} ll^2$.

2.3.2 工作空间综合 设计目标是对该构型的雕刻机, 进行基于最优 η 的工作空间综合. 它能满足并联机构运动终端的工作范围(mm), 为矩形 $L_x \times L_y$, 工作台相对于雕刻机的位置应关于 $X = -L_5/2$ 对称, 且在坐标系的第一、第二象限. 同时, 确定其底边与 $Y = (\max(L_1 - L_2, L_3 - L_4) + 5)$ (mm) 重合. 其设计思路是, 定义杆长系数 a, b, c, d, α , 确定一个杆长初值 L_0 , 输入 L_x, L_y , 并预选一组杆长系数 $(a_0, b_0, c_0, d_0, \alpha_0)$. 对该机构以全局运动性能指标 η 最大为目标, 进行优化设计, 得到一组优化的杆长系数 $(a^*, b^*, c^*, d^*, \alpha^*)$. 接着, 确定具有优化杆长的平面并联机构工作空间. 然后, 测试矩形 $L_x \times L_y$ 是否落在工作空间内. 否则, 返回增大初值 L_0 , 重新计算工作空间及再次测试矩形 $L_x \times L_y$ 是否落在工作空间内, 直至满足要求为止. 下面详细分析该优化设计问题. 其目标函数 η_{\max} , 设计变量为 a, b, c, d, α , 而约束函数有 2 个.

(1) 要求驱动杆 L_1, L_4 是无条件曲柄, 在整个工作空间内无奇异点存在. 不妨假设 $a = L_2/L, b = L_3/L, c = L_4/L, d = l/L, L_1/L_5 = \alpha, L_1 + L_5 = l, L = (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)/4$. 由文献[1]可知, 各杆长须满足如下条件, 即 $a + b + c + d = 4.0, 0 < a, b, c < 2.0, 0 < d < 1.0, \alpha > 0$. (2) 考虑到实际的应用场合, 各杆长度应避免相差太大, 故 a, b, c, d, α 的值尽量接近. 为了优化方便, 缩小 a, b, c, d, α 的取值范围即为 $0.5 < d < 1.0, 0.6 < a, b, c, d, \alpha < 1.6$. 该问题且有 5 个设计变量 $X = (a, b, c, d, \alpha)$, 两个约束条件的单目标优化设计问题. 该约束优化问题可表示为

$$\min f(X) = \min\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{n_m}{\sum_{i=1}^{n_m} \frac{1}{k_i}} \begin{cases} g_1(X) = a + b + c + d = 4.0 \\ g_i(X) = i - 1.6 < 0 \quad (i = a, b, c) \\ g_2(X) = d - 1.0 < 0 \\ g_j(X) = 0.6 - j < 0 \quad (j = a, b, c) \\ g_3(X) = 0.5 - d < 0 \end{cases}$$

的最优解. 式中 k_i 值见式(5). 由于该目标函数是较复杂的复合函数, 故这里采用对目标函数的性态无特殊要求的随机方向法来求解. 它有原理简单、解法直接、程序设计简单、使用方便

3 设计实例

设基于平面并联机构 CNC 雕刻机主轴的运动范围(mm) 为 400×400 , 工作台相对于雕刻机的位置应在坐标系的第一、第二象限. 要求以全局运动性能指标 η 最大为目标, 对平面并联机构进行优化设计, 确定各个杆的杆长 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 及工作台相对于雕刻机的位置. (1) 已知 $L_x = 400$ mm, $L_y = 400$ mm. (2) 根据图 4 所示的随机方向搜索优化算法程序, 取 $L_0 = 405$ mm, $X^0 = [1.4, 1.2, 0.8, 0.6, 1.1]$, $n = k = 6$, $\epsilon = 0.21$, $\alpha_0 = 0.02$, $f_0 = 2.1863$ ($\eta = 0.4547$). 在计算机上用 Matlab 优化工具箱编程运行, 共迭代 100 次, 求得约束最优解. $X^* = [1.0112, 1.0000, 1.0000, 0.9888, 1.5000]$, $f(X^*) = 1.2890$, $\eta^* = 0.7758$. 那么, 则各个杆的杆长分别为 $L_1 = 240.28$ mm, $L_2 = 409.54$ mm, $L_3 = 405.00$ mm, $L_4 = 409.53$ mm, $L_5 = 160.18$ mm.

绘制出的平面并联机构的可达工作空间, 如图 5 所示. 机构相对于工作台的极限位置, 如图 6 所示. 通过位置逆解方程式(1), 求出平面并联机构的四个极限位置(D), 计算结果如表 1 所示.

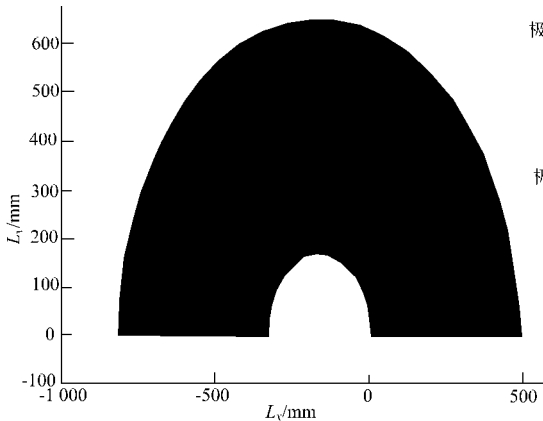


图 5 平面并联机构的可达工作空间

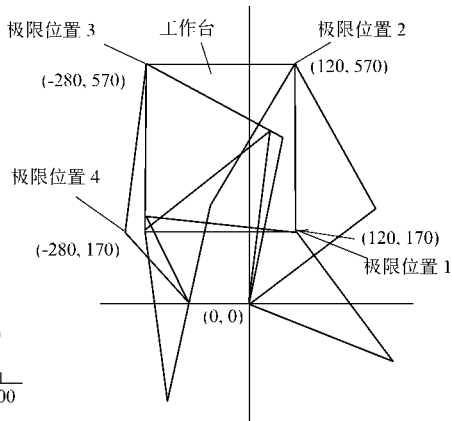


图 6 机构相对于工作台的极限位置

表 1 平面并联机构的极限位置表

D/mm	$\theta_1/(\text{ }^\circ)$	$\theta_2/(\text{ }^\circ)$	$\theta_3/(\text{ }^\circ)$	$\theta_4/(\text{ }^\circ)$
(120, 170)	122.186 3	- 20.331 6	- 4.671 3	129.896 4
(120, 570)	79.809 5	34.094 0	54.524 7	122.128 7
(- 280, 570)	136.875 8	77.792 0	82.203 1	154.531 1
(- 280, 170)	257.063 0	82.590 0	99.277 1	214.882 5

4 结束语

基于平面并联机构的 CNC 雕刻机, 具有可实现平动和转动的解耦控制工作空间大, 以及刚度较大等优点. 它同时可将运动学设计问题, 视为以全局运动性能指标最大为目标的单目标、有约束的优化设计问题. 用随机方向法搜索到一组杆长系数最优解, 即 $a = 1.0112$, $b = 1.0$, $c = 1.0$, $d = 0.9888$, $\alpha = 1.5$, 其全局运动性能指标 η 可达 0.7758. 设计实验例证表明, 该

最优解是可行的, 可用于样机的开发.

参 考 文 献

- 1 周双林, 邹慧君, 姚燕安等. 混合输入五杆机构运动性能的分析[J]. 机械设计与研究, 2001, 17(1): 31 ~ 33
- 2 程光蕴, 贺慧农. 两自由度连杆机械精确实现平面轨迹的研究[J]. 东南大学学报(自然科学版), 1990, 20(3): 7 ~ 11
- 3 孔建益, Funk W, 吴干城. 具有一个受控原动件的五杆机构精确实现给定传动比的研究[J]. 武汉冶金科技大学学报(自然科学版), 1997, 20(2): 189 ~ 193
- 4 Grosselin C M, Angeles J. The optimum kinematic design of a planar 3-DOF parallel manipulators[J]. ASME J. of Mechanical Design, 1988, 110(1): 35 ~ 40
- 5 Grosselin C M, Angeles J. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators[J]. ASME J. of Mechanical Design, 1991, 113(3): 220 ~ 226
- 6 刘雄伟, 谢明红, 庄有土等. CNC 双摇臂雕刻机直线插补运动的计算机仿真[A]. 中国机械工程学会生产工程分会主编. 全国生产工程第 8 届学术大会暨第 3 届青年学者学术会议论文集[C]. 威海: 机械工业出版社, 1999. 599 ~ 602
- 7 Mc-Carthy J M. Geometric design of linkages[M]. New York: Springer-Verlag Inc., 2000. 5 ~ 6
- 8 Alciatore D, Ng C. Determining manipulator workspace boundaries using the monte carlo method and least squares segmentation[J]. ASME Robotics Kinematics Dynamics and Controls, 1994. 72: 141 ~ 146
- 9 叶元烈. 机械优化理论与设计[M]. 北京: 中国计量出版社, 2000. 60 ~ 63

Kinematics of Planar Parallel Manipulator for Computer Numerical Control of Engraving Machine

Zheng Yaqing Liu Xiongwei

(College of Electromech. Eng. & Auto., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A conceptual design is advanced for the use of a novel 3-axis CNC engraving machine, in which the feed motions in the x and y directions are realized by a five-bar planar parallel manipulator while that in the z direction is realized by a series mainshaft mounted on the end of the manipulator. The authors investigate the kinematics of the planar parallel manipulator based on the global dexterity, and point out that the kinematics can be regarded as a constrained optimal design problem with a single objective, which makes the global kinematics performance index to be maximal. And moreover, an optimal solution is searched out by the method of random directions and verified by a case study. The result indicates that the proposed kinematics is feasible and can be applied to the development of sample machine.

Keywords planar parallel manipulator, kinematics, engraving machine, computer numerical control