第 23 卷　第 3 期　　华侨大学学报 (自然科学版)　　Vol 23　No. 3
2002 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul 2002

文章编号　1000-5013(2002)03-0229-03

关于正定矩阵不等式的注记

宋　海　洲

(华侨大学数学系, 泉州 362011)

摘要　正定厄米特矩阵行列式的一个不等式, 对其进行推广. 得到正定矩阵行列式的两个不等式

关键词　广义正定矩阵, 不等式, 行列式, 实对称正定矩阵

中图分类号　O 151. 21　　　**文献标识码**　A

文献 [1] 叙述了正定厄米特矩阵的一个重要性质

定理 1 [1]　设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 k 个 n 阶正定厄米特矩阵, 则有

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_k|^{\frac{1}{n}} \geq |A_1|^{\frac{1}{n}} + |A_2|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |A_k|^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

且等号仅在 A_i 都是某个矩阵 B 的倍式时成立 这里, $|A_i|$ 是 A_i 的行列式. 郝稚传在其文献 [2] 引伸这一性质 他证明了下面的不等式:

定理 2 [2]　设 $A_i, B_i, \cdots, C_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 都是 n 阶正定厄米特矩阵, $\alpha, \beta, \cdots, r$ 都是正实数, 且 $\alpha + \beta + \cdots + r = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i|^{\alpha} |B_i|^{\beta} \cdots |C_i|^{r} < \left|\sum_{i=1}^{k} A_i\right|^{\alpha} \left|\sum_{i=1}^{k} B_i\right|^{\beta} \cdots \left|\sum_{i=1}^{k} C_i\right|^{r}. \tag{2}$$

王淑贵于文献 [3] 得到如下形式的推广:

定理 3　设 $A_i, B_i, \cdots, C_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 都是 n 阶正定厄米特矩阵, $\alpha, \beta, \cdots, r$ 都是正实数, 且 $\alpha + \beta + \cdots + r = p \geq 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i|^{\alpha} |B_i|^{\beta} \cdots |C_i|^{r} \leq \left|\sum_{i=1}^{k} A_i\right|^{\alpha} \left|\sum_{i=1}^{k} B_i\right|^{\beta} \cdots \left|\sum_{i=1}^{k} C_i\right|^{r}. \tag{3}$$

本文削弱不等式(3) 的条件 我们将不等式(3) 成立的条件, 推广至 $p \geq \frac{2}{n}$ 及 $A_i, B_i, \cdots, C_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 之中都有一为实广义正定矩阵情形.

1　主要结果

定理 4　设 $A_i, B_i, \cdots, C_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k - 1)$ 是 n 阶实对称正定矩阵, $A_k, B_k, \cdots, C_k$ 都是 n 阶实广义正定矩阵, $\alpha, \beta, \cdots, r$ 都是正实数, 且 $\alpha + \beta + \cdots + r = p \geq \frac{2}{n}$, 则

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i|^{\alpha} \cdot |B_i|^{\beta} \cdots |C_i|^{r} \leq \left|\sum_{i=1}^{k} A_i\right|^{\alpha} \cdot \left|\sum_{i=1}^{k} B_i\right|^{\beta} \cdots \left|\sum_{i=1}^{k} C_i\right|^{r}. \tag{4}$$

收稿日期　2001-12-29　　**作者简介**　宋海洲 (1971-), 男, 讲师

如果保留 $A_i, B_i, \cdots, C_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 都是 n 阶正定厄米特矩阵, 则有如下定理:

定理 5 设 $A_i, B_i, \cdots, C_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 都是 n 阶正定厄米特矩阵, $\alpha, \beta, \cdots, r$ 都是正实数, 且 $\alpha+\beta+\cdots+r=p\geq\frac{1}{n}$, 则

$$\sum_{i=1}^{k}|A_i|^{\alpha}|B_i|^{\beta}\cdots|C_i|^{r}\leq\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|^{\alpha}\left|\sum_{i=1}^{k}B_i\right|^{\beta}\cdots\left|\sum_{i=1}^{k}C_i\right|^{r}. \tag{5}$$

2 一些引理

定义 1[4] 设 A 是 n 阶实方阵, 如果对于任何非零的 n 维实向量, 都有 $x'Ax>0$, 其中 x' 表示 x 的转置, 则把 A 称做实广义正定矩阵.

引理 1[4] 设 A 为 n 阶实方阵, 则下列命题等价. (1) A 是实广义正定矩阵. (2) 对任意 n 阶实可逆矩阵 P, $P'AP$ 为实广义正定矩阵.

引理 2[4] 实广义正定矩阵的特征值的实部为正.

引理 3[5] 设 $a_j>0\ (1\leq j\leq n+1)$, $r>0$, $a_{n+1}^{r}\geq a_1^{r}+\cdots+a_n^{r}$, 则 $\forall t\geq r$, 有 $a_{n+1}^{t}\geq a_1^{t}+a_2^{t}+\cdots+a_n^{t}$.

引理 4[6] 设 A 实广义正定矩阵, B 实对称正定矩阵, 则 $\forall t\geq 2/n$, 有

$$|A+B|^{t}\geq|A|^{t}+|B|^{t}.$$

引理 5 设 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 实对称正定阵, A_k 实广义正定矩阵, $t\geq 2/n$, 则

$$|A_1+\cdots+A_k|^{t}\geq|A_1|^{t}+\cdots+|A_k|^{t}.$$

证明 容易由引理 4 推得.

引理 6 $a, b\in(0,1)$, $\forall t\in[0,1]$, 有 $a^{t}b^{1-t}\leq ta+(1-t)b$.

引理 7 $a, b\in(0,1)$, α, β 为正实数, 则 $a^{\alpha}b^{\beta}\leq\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a^{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}b^{\alpha+\beta}$.

证明 记 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=t$, 则 $t\in[0,1]$. 记 $a^{\alpha+\beta}=x$, $b^{\alpha+\beta}=y$, 则 $x, y\in(0,1)$. 由引理 6 得 $x^{t}y^{1-t}\leq tx+(1-t)y$, 即 $(a^{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(b^{\alpha+\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\leq\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a^{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}b^{\alpha+\beta}$, 即, $a^{\alpha}b^{\beta}\leq\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a^{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}b^{\alpha+\beta}$.

引理 8 $a, b, \cdots, c\in(0,1)$, $\alpha, \beta, \cdots, r$ 为正实数, 则 $a^{\alpha}b^{\beta}\cdots c^{r}\leq\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\cdots+r}a^{\alpha+\beta+\cdots+r}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\cdots+r}b^{\alpha+\beta+\cdots+r}+\cdots+\frac{r}{\alpha+\beta+\cdots+r}c^{\alpha+\beta+\cdots+r}$.

证明 记 $c, b, \cdots, c$ 的元素个数为 n. (1) 由引理 7 知 $n=2$ 时命题成立. (2) 设 $n=k$ 命题成立. 设 $a, b, \cdots, c, d$ 是属于 $(0,1)$ 的 $k+1$ 个数, $\alpha, \beta, \cdots, r, s$ 为正实数. 记 $p_1=\alpha+\cdots+r$, $p=\alpha+\cdots+r+s$, 则有 $p_1+s=p$. 那么

$$a^{\alpha}b^{\beta}\cdots c^{r}d^{s}\leq\left[\frac{\alpha}{\alpha+\cdots+r}a^{\alpha+\cdots+r}+\cdots+\frac{r}{\alpha+\cdots+r}c^{\alpha+\cdots+r}\right]d^{s}=\left(\frac{\alpha}{p_1}a^{p_1}+\cdots+\frac{r}{p_1}c^{p_1}\right)d^{s}=\frac{\alpha}{p_1}a^{p_1}d^{s}+\cdots+\frac{r}{p_1}c^{p_1}d^{s}\leq\frac{\alpha}{p_1}\left(\frac{p_1}{p}a^{p}+\frac{s}{p}d^{p}\right)+\cdots+\frac{r}{p_1}\left(\frac{p_1}{p}c^{p}+\frac{s}{p}d^{p}\right)=$$

$$\frac{\alpha}{p}a^{p}+\frac{\beta}{p}b^{p}+\cdots+\frac{r}{p}c^{p}+\left(\frac{\alpha}{p_1}+\cdots+\frac{r}{p_1}\right)\frac{s}{p}d^{s}=$$

$$\frac{\alpha}{p}a^p + \frac{\beta}{p}b^p + \cdots + \frac{r}{p}c^p + + \frac{s}{p}d^p,$$

故命题对 $n=k+1$ 也成立. 从而, 命题对一切的 n 成立.

3 定理的证明

定理 4 的证明 由引理 5 知:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}|A_i|^p}{\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|^p} \le 1, \frac{\sum_{i=1}^{k}|B_i|^p}{\left|\sum_{i=1}^{k}B_i\right|^p} \le 1, \cdots, \frac{\sum_{i=1}^{k}|C_i|^p}{\left|\sum_{i=1}^{k}C_i\right|^p} \le 1, \tag{6}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}|A_i|^\alpha|B_i|^\beta\cdots|C_i|^r}{\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|^\alpha\left|\sum_{i=1}^{k}B_i\right|^\beta\cdots\left|\sum_{i=1}^{k}C_i\right|^r} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{|A_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|}\right)^\alpha\left(\frac{|B_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}B_i\right|}\right)^\beta\left(\frac{|C_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}C_i\right|}\right)^r \le$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\alpha}{p}\left(\frac{|A_i|^p}{\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|^p}\right) + \cdots + \frac{r}{p}\left(\frac{|C_i|^p}{\left|\sum_{i=1}^{k}C_i\right|^p}\right)\right] \text{(利用引理 8)} =$$

$$\frac{\alpha}{p}\frac{\sum_{i=1}^{k}|A_i|^p}{\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|^p} + \cdots + \frac{r}{p}\frac{\sum_{i=1}^{k}|C_i|^p}{\left|\sum_{i=1}^{k}C_i\right|^p} \le \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p} + \cdots + \frac{r}{p} \text{(由不等式(6))} = 1.$$

因此, 定理 4 成立.

定理 5 的证明 利用定理 1 及引理 3 容易推得对 $p \ge n^{-1}$, 有

$$\sum_{i=1}^{k}|A_i|^p \le \left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|^p, \cdots, \sum_{i=1}^{k}|C_i|^p \le \left|\sum_{i=1}^{k}C_i\right|^p.$$

再用证明定理 4 的方法, 即证得定理 5 成立.

参 考 文 献

1 张远达. 线性代数原理[M]. 上海: 上海教育出版社, 1981. 470～473

2 郝稚传. 关于厄特矩阵的一个不等式[J]. 数学的实践与认识, 1985, (4): 59～61

3 王淑贵. 关于正定厄米特矩阵的一个定理[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(3): 369～373

4 殷庆祥. 关于实方阵的正定性[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(2): 245～147

5 袁晖坪. 复矩阵的亚半正定性[J]. 工科数学, 2001, 17(4): 32～37

6 金 能. 复正定矩阵的行列式的几个不等式[J]. 数学的实践与认识, 2000, 30(4): 501～507

Notes to the Inequality of Positive Definite Matrix

Song Haizhou

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract In extending an inequality of the determinant of positive definite Hermintian matrix, the author obtains two inequalities from the determinant of positive definite matrix.

Keywords generalized positive definite matrix, inequality, determinant, positive definite matrix of real symmetry