第 23 卷　第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.23　No.3
2002 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul.2002

文章编号　1000-5013(2002)03-0217-05

四阶杆振动方程的 tanh(*x*) 辛格式

黄　浪　扬

(华侨大学数学系, 泉州 362011)

摘要　考虑四阶杆振动方程的哈密顿方程组. 利用 Hyperbolic 函数 tanh(x), 构造具周期边界条件的四阶杆振动方程的具任意阶精度的有限维空间截断的辛离散, 最后给出数值例子. 数值结果表明, 单辛格式具有良好的长时间数值行为.

关键词　四阶杆振动方程, Hamilton 方程组, 辛格式

中图分类号　O 241.6　　文献标识码　A

尽管 Hamilton 正则方程在由经典力学向量子力学的过渡过程中曾起过重要的桥梁作用, 尽管电磁场方程的 Hamilton 形式(连同 Lagrange 形式)[1] 很早就出现, 但它们在经典物理、力学及工程应用领域中并未受到足够的重视. 自从冯康[2~4]开创计算 Hamilton 力学以来, 数理方程的 Hamilton 表示日益引起人们的关注和兴趣. 目前, Toda 格子方程、波动方程、可压缩流动力学方程等一批方程的 Hamilton 形式及其辛差分格式[5~7]已得到深入研究. 本文考虑下列四阶杆振动方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \quad 0 \le x \le 2\pi,\ t \ge 0. \tag{1}$$

其初始条件为

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le 2\pi, \tag{2}$$

且具周期边界条件

$$u(0,t) = u(2\pi,t),\ t \ge 0. \tag{3}$$

其精确解为

$$u(x,t) = \sin x \cos t \quad (0 \le x \le 2\pi). \tag{4}$$

上述四阶杆振动方程(1)可改写为无穷维 Hamilton 方程组. 所以, 自然要求用一种离散或半离散方法来反映此性质. 其基本思想是找到方程(1)的一个有限维空间截断, 使得半离散结果成为一个有限维的 Hamilton 方程组. 然后, 可以用时间方向的辛离散来积分此有限维的 Hamilton 方程组[8]. 本文的目的, 在于给出基于方程(1)的 Hamilton 方程组及其辛格式. 其结构在节 1 中, 导出四阶杆振动方程(1)的一种 Hamilton 方程组[9], 并利用 Hyperbolic 函数 tanh(x)来构造具任意阶精度的辛格式. 在节 2 中, 对所给出的辛格式进行稳定性分析. 最后, 在节 3 中给出数值例子.

收稿日期　2002-01-09　　作者简介　黄浪扬(1974-), 男, 助教

基金项目　华侨大学科研基金资助项目

1 四阶杆振动方程的 Hamilton 方程组及其辛格式

1.1 四阶杆振动方程的 Hamilton 方程组

首先改写方程(1)为 Hamilton 方程组,即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{H}_z, \tag{5}$$

其中 Hamilton 函数为 $H = \frac{1}{2}\int (v_x^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x$, 且

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},\ \boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{J}' = -\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}_z = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta H}{\delta u} \\ \dfrac{\delta H}{\delta v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{xx} \\ -v_{xx} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

方程组(5)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}z, \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{bmatrix},$$

且 Δ 是$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$的中心差分算子. 令 $\Delta(2m)$ 是$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$的 $2m$ 阶中心差分算子,则

$$\Delta(2m) = \nabla_+\nabla_- \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\beta_j\left(\frac{\Delta x^2\nabla_+\nabla_-}{4}\right)^j, \tag{8}$$

其中 $\beta_j = [(j!)^2 2^{2j}]/[(2j+1)!(j+1)]$, ∇_+ 和 ∇_- 分别是向前和向后差分算子. 记 $\boldsymbol{U} = [u_1, u_2, \cdots, u_N]$, $\boldsymbol{V} = [v_1, v_2, \cdots, v_N]$, 则方程组(7)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{M}(2,2m) \\ -\boldsymbol{M}(2,2m) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}(2,2m)\boldsymbol{V} \\ -\boldsymbol{M}(2,2m)\boldsymbol{U} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是 $N\times N$ 单位矩阵, $\boldsymbol{M}(2,2m)$ 是相应于 $\Delta(2m)$ 的 $N\times N$ 矩阵. 在空间方向方程组(9)逼近于方程组(7)具 $O(\Delta x^{2m})$ 阶精度. 实践中,常用二阶和四阶差分近似. 令 $\Delta(2)$ 和 $\Delta(4)$ 分别是$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$的二阶和四阶中心差分算子. 在这两种情况下,有

$$\Delta(2)u_i^j = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}, \tag{10}$$

$$\Delta(4)u_i^j = \frac{-u_{i+2}^j + 16u_{i+1}^j - 30u_i^j + 16u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{12\Delta x^2}. \tag{11}$$

可以用生成函数法来构造方程组(7)的辛格式. 这里,我们给出用 Hyperbolic 函数 $\tanh(x)$ 来构造的辛格式.

1.2 Hyperbolic 函数 tanh(x) 的辛格式

现在,我们考虑线性 Hamilton 方程组

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}(2m)z, \tag{12}$$

由 $\tanh(x)$ 所生成的辛格式. 其中 $\boldsymbol{A}(2m)$ 是逼近于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 $2m$ 阶精度的对称矩阵. 在时

间 $t+\Delta t$ 及 t 处方程(12)具有精确解

$$z(t+\Delta t)=e^{\Delta t J^{-1}A(2m)}z(t).$$

因

$$z(t+\Delta t)-z(t)=(e^{\Delta t J^{-1}A(2m)}-1)z(t),\ z(t+\Delta t)+z(t)=(e^{\Delta t J^{-1}A(2m)}+1)z(t).$$

从而有

$$z(t+\Delta t)-z(t)=\frac{e^{\Delta t J^{-1}A(2m)}-1}{e^{\Delta t J^{-1}A(2m)}+1}(z(t+\Delta t)+z(t))=$$

$$\tanh\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)\right)(z(t+\Delta t)+z(t)),\tag{13}$$

其中

$$\tanh(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}x^{2k-1},$$

$$a_{2k-1}=2^{2k}(2^{2k}-1)\frac{B_{2k}}{(2k)!},\ B_{2k}\text{ 为 Bernoulli 数.}\tag{14}$$

格式(13)在时间方向具任意阶精度．然而若取 tanh(x) 的 $2s$ 阶截断误差表达式

$$\tanh\left(2s,\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)\right)=\sum_{k=1}^{s}a_{2k-1}\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)\right)^{2k-1},$$

则可得精度为 $O(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2m})$ 的差分格式为

$$z_{n+1}-z_n=\tanh\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)\right)(z_{n+1}+z_n)\tag{15}$$

现证明格式(15)是辛格式．我们有下列两个引理[2].

引理 1　若 $f(x)$ 是奇次多项式且 L 是无穷小辛矩阵，即 $L'J+JL=0$，则 $f(L)$ 也是无穷小辛矩阵．

引理 2　若 Φ 是无穷小辛矩阵，$I+\Phi\neq 0$，则 $F=(I+\Phi)^{-1}(I-\Phi)$ 也是一个辛矩阵．由于方程组(7)中的矩阵 A 都是对称矩阵，令 $L=J^{-1}A$，则

$$L'J+JL=A'(J^{-1})'J+JJ^{-1}A=-A'+A=0$$

即矩阵 $L=J^{-1}A(2m)$ 是无穷小辛矩阵；由引理 1 知 $\Phi=\tanh\left(2s,\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)\right)$ 是无穷小辛矩阵．从而由引理 2 知，格式(15)是辛格式．于是有

定理 1　格式(15)是辛的，且在时间方向具有 $2s$ 阶精度，在空间方向具有 $2m$ 阶精度．下面给出阶为 $O(\Delta t^2+\Delta x^{2m})$ 和 $O(\Delta t^4+\Delta x^{2m})$ 的两个格式：

$$z_{n+1}-z_n=\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)(z_{n+1}+z_n),\tag{16}$$

$$z_{n+1}-z_n=\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)-\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A(2m)\right)^3\right)(z_{n+1}+z_n).\tag{17}$$

注意到格式(16)恰好是中心 Euler 格式．特别地，当 $m=1$ 时，它为下列格式

$$\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2}=-\frac{\delta_x^4u^{n+1}+2\delta_x^4u^n+\delta_x^4u^{n-1}}{4\Delta x^4},\tag{18}$$

其中 $\delta_x^4u^n=u_{i+2}^n-4u_{i+1}^n+6u_i^n-4u_{i-1}^n+u_{i-2}^n$.

2 tanh(x) 辛格式的稳定性分析

为研究 $J^{-1}A(2m)$ 的特征值[0], 需下列引理:

引理 3 令 A, B, C, D 为 $N\times N$ 矩阵, 若 $AC = CA$, 则有

$$\det\begin{bmatrix}\lambda I - A & -B \\ -C & \lambda I - D\end{bmatrix} = \det\left(\lambda^2 I - \lambda(A + D) + AD - CB\right).$$

特别地, 若矩阵 A, B, C, D 的特征值分别为 $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 1, \cdots, N)$, 则

$$\det\left(\lambda^2 I - \lambda(A + D) + AD - CB\right) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2 - (a_i + d_i)\lambda + a_i d_i - c_i b_i).$$

引理 4 若 $J^{-1}A(2m)$ 的全部特征值为纯虚数, 则格式(15)是稳定的.

由方程(8)可知, 矩阵 $M(2, 2m)$ 的特征值为

$$\lambda(2, 2m)_k = -\frac{1}{4\Delta x^2}\sin^2\frac{k\pi}{2N}\sum_{j=0}^{m-1}\beta_j\left(\sin^2\frac{k\pi}{2N}\right)^j,\quad k = 1, \cdots, N.$$

又由引理 3 知, 矩阵

$$J^{-1}A(2m) = \begin{bmatrix}0 & M(2, 2m) \\ -M(2, 2m) & 0\end{bmatrix}$$

的特征值 $\pm i\sqrt{\lambda(2, 2m)_k}$ 全为纯虚数. 于是, 由引理 4 可得

定理 2 格式(15)是稳定的.

3 数值例子

本节, 对四阶杆振动方程的周期边值问题(1)～(3), 我们用 Euler 辛格式(16)($m = 1$)(即式(18))来数值离散方程(1). 由于 Euler 辛格式(18)是三层隐格式, 所以初始层的值 U^0 和第一层的值 U^1 必须是已知的. 为简便起见, 在三层格式中, 初始层的网格函数值按初值计算, 第一层的值也用精确值进行计算. 取时间步长为 $\Delta t = (\pi/64)^2$, 空间步长为 $\Delta x = \pi/64$(即取 128 个配置点). 并取初值 $f(x) = \sin(x)$, 且把数值结果与精确解 $u(x, t) = \sin x\cos t$ 进行比较. 积分 10 000 步后的数值解(U_j)、精确解($U(x_j)$)和误差($U(x_j) - U_j$)列于表 1($0\le x\le 8\pi/16$, $t = 10\,000\times(\pi/64)^2 = 24.096$).

表 1 Euler 辛格式(18)与精确解在 $t = 24.096$, $0\le x\le 8\pi/16$
($x_j = j\times\Delta x$, $j = 1, 2, \cdots, 128$)时的数值比较结果

x_j	精确解	数值解	误差
0	0	-3.7529×10^{-12}	3.7529×10^{-12}
$\pi/16$	9.9258×10^{-2}	9.8443×10^{-2}	8.1559×10^{-4}
$2\pi/16$	1.9470×10^{-1}	1.9310×10^{-1}	1.5998×10^{-3}
$3\pi/16$	2.8266×10^{-1}	2.8034×10^{-1}	2.3226×10^{-3}
$4\pi/16$	3.5976×10^{-1}	3.5681×10^{-1}	2.9561×10^{-3}
$5\pi/16$	4.2304×10^{-1}	4.1956×10^{-1}	3.4760×10^{-3}
$6\pi/16$	4.7005×10^{-1}	4.6619×10^{-1}	3.8623×10^{-3}
$7\pi/16$	4.9901×10^{-1}	4.9491×10^{-1}	4.1002×10^{-3}
$8\pi/16$	5.0878×10^{-1}	5.0460×10^{-1}	4.1806×10^{-3}

数值结果表明, 单辛格式具有良好的长时间数值行为, 它们适合于长时间的数值计算. 数

值结果与理论分析相符合 .

参　考　文　献

1 吴大猷 . 电磁学—— 理论物理: 第 3 册[M]. 北京: 科学出版社, 1983. 1～40

2 Feng Kang, Qin Mengzhao. The symplectic methods for the computation of Hamiltonian equations[A]. In: Zhu Youlan, et al, eds. Proc. of 1st Chinese Cong. on Numerical Methods of PDE′s, Lecture Notes in Math. [C]. Berlin: Springer, 1987. 1～37

3 Feng K. On difference schemes and symplectic geometry[A]. In: Feng K, eds. Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Computation of Partial Differential Equations[C]. Beijing: Science Press, 1985. 42～58

4 冯　康, 秦孟兆 . Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法[J]. 自然科学进展, 1991, (2): 102～112

5 Li C W, Qin M Z. A symplectic diffirence scheme for the infinite dimensional Hamiltonian systems[J]. J. Comput. Math., 1988, 6(2): 164～174

6 秦孟兆 . 波动方程两种哈密顿型蛙跳格式[J]. 计算数学, 1988, 10(3): 272～281

7 秦孟兆 . 辛几何及计算哈密顿力学[J]. 力学与实践, 1990, 12(6): 1～20

8 Qin M Z, Zhu W J. Construction of symplectic schemes for wave equations via hyperbolic functions sinh(x), cosh(x), tanh(x) [J]. Comput. Math. Appl., 1993, 26(8): 1～11

9 黄浪扬, 曾文平 . 解四阶杆振动方程的辛算法[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版), 2001, 14(2): 28～31

10 Miller J H. On the location of zeros of certain class of polynomials with application to numerical analysis [J]. J. Inst. Math. Appl., 1971, 8: 397～409

Symplectic Schemes of Four-Order Rod Vibration Equation via Function tanh(x)

Huang Langyang

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　Hamiltonian schemes of four-order rod vibration equation are considered and hyperbolic function tanh (x) is applied. In relation to four-order rod vibration equation with periodic boundary condition, symplectic discretion with accuracy of arbitrary order and finite dimensional spatial truncation is constructed. Numerical examples are given finally, the results of which show that the symplectic schemes have excellent long-time numerical behavior.

Keywords　four-order rod vibration equation, Hamiltonian systems, symplectic scheme