第 24 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 2
2002 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2002

文章编号　1000-5013(2002)02-191-07

元素判别值分配法在求解 TSP 问题中的应用

张　银　明

(华侨大学信息科学与工程学院, 泉州 362011)

摘要　针对旅行商(TSP)问题的求解, 研究出一种完全不同于现行方法的求解新途径. 该方法基于元素判别值的分配, 其值是一个元素可调配和被选择的权值, 是经综合计算的. 因此, 可作为元素调配或选择的依据. 使用它求解 TSP 问题时, 只需一次分配可获最方案, 无需调整.

关键词　旅行商问题, 元素判别值分配法, 运筹学, 调运问题

中图分类号　O 22　　　文献标识码　A

运筹学中的调运问题、指派问题和 TSP 问题的求解, 至今仍使用诸如单纯形法、最小元素法、伏格尔概算法和分支定界法等方法. 这些方法虽可行, 但求过程麻烦复杂. 目前最新的神经网络或人工智能方法, 一般只能得到近似解, 而且计算量大, 不利于微机求解. 但它们存在 3 个主要问题. (1) 一般不能一次调配成功, 得反复迭代. (2) 有时得进行退化处理. (3) 迭代过程麻烦. 使用元素判别值分配求解 TSP 问题, 只需一次分配便可获最优解. 因而, 它是一种独特的方法, 具有明显创新性.

1　元素判别值基本理论

假设一般运筹学的调运问题为如下归结: 有 m 个供应点 A_i, 各点可供应量为 G_i; 有 n 个需求点 B_j, 其需求量为 Q_j. 从 A_i 调给 B_j 的数量为 X_{ij}, 单位运位 C_{ij}, 且供需平衡. 其中, $i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$. 要求运费最小的调配方案, 可归于线性规划问题. 其数学模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = Q_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = G_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{3}$$

$$X_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} G_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j. \tag{4}$$

它的初始调运平衡表, 如图 1 所示. 对此类问题, 可使用元素判别值分配法求解. 下面是它的有

收稿日期　2001-11-27　　作者简介　张银明(1939-), 男, 教授

关概念简述.

需求点 / 供应点	B_1	B_2	···	B	供应量
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}		C_{1n} X_{1n}	G_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2n} X_{2n}	G_2
⋮					⋮
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{mn} X_{mn}	G_m
需求量	Q_1	Q_2	···	Q_n	ΣG_i / ΣQ_j

图1 运输一般问题的调配分配格式

定义1 A_i 调给 B_j 的特定变量 X_{ij} 称为元素.

定义2 凡能排列成 X_{ij}, $X_{i,j+k}$, $X_{i+1,j+k}$, $X_{i+1,j}$ 的元素集合, 称为矩形回路. 其中

$$i = 1, 2, \cdots, m, \qquad 1 - i \leq 1 \leq = m - i, \qquad l \neq 0,$$
$$j = 1, 2, \cdots, n, \qquad 1 - j \leq k < n - j, \qquad k \leq \neq 0.$$

定义3 在一个以 X_{ij} 为顶点的矩形回路内, 当调整一个单位运输量并以 X_{ij} 为调进对象时, 引起该回路运费增减的数量. 这称为元素 X_{ij} 在此矩形回路的检验数, 记作 ΔX_{ij}.

定义4 元素 X_{ij} 所有矩形回路的检验数小于0的个数, 称为元素 X_{ij} 的判别值, 记作 $\mathrm{d}X_{ij}$.

定义5 按照元素判别值进行调运分配的求解方法, 称为元素判别值分配法.

依据上述定义, 在一个 $m \times n$ 阶调运平衡表中, 含有 $m \times n$ 个元素. 每个元素以它为顶点的矩形回路计有 $(m-1)(n-1)$ 个. 元素 X_{ij} 的矩形回路检验数为

$$\Delta X_{ij} = C_{ij} - C_{i,j+k} + C_{i+1,j+k} - C_{i+1,j}. \tag{5}$$

由于一个元素有 $(m-1)(n-1)$ 个矩形回路, 因而其判别值 $\mathrm{d}X_{ij} \in [0, (m-1)(n-1)]$. 基于任一个元素的矩形回路都是有限的, 所以总可以找到某种顺序使 ΔX_{ij} 与 ΔX_s ($s = 1, 2, \cdots, (m-1)(n-1)$) 相对应. 为此可约定, 元素 X_{ij} 的矩形回路按照自左向右, 由上而下的顺序确定. 不妨定义函数

$$f_s(x) = \begin{cases} 1 & 当\ x < 0, \\ 0 & 当\ x >= 0. \end{cases}$$

则计算元素 X_{ij} 判别值的数学模型为

$$\mathrm{d}X_{ij} = \sum_{s=1}^{(m-1)(n-1)} f_s(\Delta X_{ij}) = \sum_{s=1}^{(m-1)(n-1)} f_s(C_{ij} - C_{i,j+k} + C_{i+1,j+k} - C_{i+1,j}). \tag{6}$$

2　TSP 的调配原则及求解算法

元素判别值分配法对调运问题、分派问题的调配基本原则，已在文献 [1～3] 中进行过介绍. 这里只叙述 TSP 问题的求解调配原则.

2.1　TSP 的调配原则

原则 1　元素判别值越大，得到调配或选择的权限也越大.

原则 2　对称 TSP 问题的调配从第 1 行开始，非对称 TSP 问题可按调配原则进行.

原则 3　TSP 问题的调配表的对角线上元素的 C_{ij} 值. 在计算元素判别值时，由 0 改为一个足够大的 m 值(如可取 $10\times\max(C_{ij})$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$)，或可视作为∞.

原则 4　当某个元素 X_{ij} 得到调配或被选择后，它所在的 i 行和 j 列的其它元素不论判别值多大，皆失去调配或被选择的权利. 对于 TSP 问题，其对称点元素 X_{ji} 也不再具有调配权.

原则 5　若有多个元素的判别值相同，则 C_{ij} 小的先分配. 如果 C_{ij} 也相同，则按下标的顺序进行调配或选择.

2.2　TSP 的调配步骤

根据上述原则，对一个对称 TSP 问题的求解可按下列算法进行. (1) 建立 TSP 问题初始调配表，并将 C_{ii} 的值取为

$$C_{ii} = 10\times\max(C_{ij}),\qquad i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

(2) 按数学模型(6)计算各元素的判别值 dX_{ij}，且填入各元素的左下角. (3) 根据 dX_{ij}，按分配原则进行调配，其过程可归结为 4 点. (a) 从第 1 行找元素判别值最大的元素为初始旅行点，设为 X_{1j}. 对该元素作选择标志，划去第 1 行和第 1 列，并将元素 X_{j1} 也划去. (b) 置 $j_0=j$. (c) 在第 j_0 行具有调配权的元素中，选择元素判别值最大的元素 $X_{j,j1}$，则

$$dX_{j,j1} = \max(dX_{j1}, dX_{j2}, \cdots, dX_{j,j1}, \cdots, dX_{jn}).$$

对该元素作选择标志，划去元素所在的行和列，并将元素 $X_{j1,j}$ 也划去. (d) 若尚未调配完，置 $j_0=j_1$，重复执行(c)；否则，调配结束. (4) 给出结果即旅行路线，并计算旅行最小耗费(即旅费、时间和距离等耗费中的一个). 现举例说明求解方法的具体过程.

例 1　参见文献 [4] 第二章例 2.2，求解 5 个城市的对称 TSP 问题. 该题的初始调配表，如图 2 所示.

使用元素判别值分配法求解. 该题 $m=5$, $n=5$，则每个元素有 $(m-1)(n-1)=16$ 个矩形回路，其判别值 $dX_{ij}\in[0,16]$. 按照元素判别值的数学模型(6)，对所有元素 X_{ij} 的判别值进行计算，其结果为

$$\begin{array}{lllll}
dX_{11}=0, & dX_{12}=7, & dX_{13}=11, & dX_{14}=10, & dX_{15}=9,\\
dX_{21}=7, & dX_{22}=0, & dX_{23}=13, & dX_{24}=9, & dX_{25}=8,\\
dX_{31}=11, & dX_{32}=13, & dX_{33}=0, & dX_{34}=7, & dX_{35}=9,\\
dX_{41}=10, & dX_{42}=9, & dX_{43}=7, & dX_{44}=0, & dX_{45}=11,\\
dX_{51}=9, & dX_{52}=8, & dX_{53}=9, & dX_{54}=11, & dX_{55}=0.
\end{array}$$

将这些元素判别值填入调配表各元素的左下方，如图 3 所示.

进行元素判别值分配法的调配. (1) 第 1 行中，判别值最大的元素为 X_{13}，则 $dX_{13}=11$. 于是，选择 X_{13} 为起始点. 在第 1 行和第 3 列作标志* (1)(第一次选择)，对 X_{13} 及 X_{31} 作相应标志

城 市	A	B	C	D	E	城市选数
A	200 X_{11}	10 X_{12}	15 X_{13}	6 X_{14}	2 X_{15}	1
B	10 X_{21}	200 X_{22}	8 X_{23}	13 X_{24}	9 X_{25}	1
C	15 X_{31}	8 X_{32}	200 X_{33}	20 X_{34}	15 X_{35}	1
D	6 X_{41}	13 X_{42}	20 X_{43}	200 X_{44}	5 X_{45}	1
E	2 X_{51}	9 X_{52}	15 X_{53}	5 X_{54}	200 X_{55}	1
城市选数	1	1	1	1	1	5 / 5

图 2 对称 TSP 调配问题初始调配

城 市	A	B	C	D	E	城市选数
A	200 X_{11} 0	10 X_{12} 7	15 X_{13} 11 ∨	6 X_{14} 10	2 X_{15} 9	1*(1)
B	10 X_{21} 7	200 X_{22} 0	8 X_{23} 13 *	13 X_{24} 9 ∨	9 X_{25} 8	1*(2)
C	15 X_{31} 11 *	8 X_{32} 13 ∨	200 X_{33} 0	20 X_{34} 7	15 X_{35} 9	1*(3)
D	6 X_{41} 10	13 X_{42} 9 *	20 X_{43} 7	200 X_{44} 0	5 X_{45} 11 ∨	1*(4)
E	2 X_{51} 9	9 X_{52} 8	15 X_{53} 9	5 X_{54} 11 *	200 X_{55} 0	1
城市选数	1	1*(2)	1*(1)	1*(3)	1*(4)	5 / 5

图 3 对称 TSP 调配问题调配结果

∨及* .(2) $j=3$, 则 $j_0=j=3$. 于是, 在第 3 行选择具有调配权限, 且元素判别值最大的元素. 该元素为 X_{32}, 则 $dX_{32}=13$. 在 X_{32}所在的行和列做标志*(2), X_{32}和 X_{23}作相应标志∨和* .(3) $j_1=2$, 则 $j_0=2$. 于是, 在第 3 行选择具有调配权限, 且元素判别值最大的元素. 该元素为 X_{24}, 则 $dX_{24}=9$. 虽 $dX_{23}=13$, 但该列已作标志, 因而已失去选择权. 余下的元素判别值最大的为 X_{24}, 必须选择该元素. 同样, 对第 2 行和第 4 列作标志, 且对 X_{24}和 X_{42}作相应标志. (4) $j_1=4$, 则 $j_0=4$. 于是, 在第 4 行选择具有调配权限, 且元素判别值最大的元素. 该元素为 X_{45}, 则

$dX_{45}=11$. 同样, 对第 4 行和第 5 列作标志, 且对 X_{45} 和 X_{54} 作相应标志.

至此, 调配已全部完成, 其结果便是最优解. 该方案的旅行路线为 $X_{13}\to X_{32}\to X_{24}\to X_{45}\to X_{51}$. 所对应的城市为 $A\to C\to B\to D\to E$. 最后, 必须由 E 回到出发的城市 A. 其耗费为 15+ 8+ 13+ 5+ 2= 43. 使用闭合回路检验法, 可以证明此解为最优解. 这里从略. 显然, 这种求解方法要比现行的其他方法简便得多.

例 **2**　非对称 TSP 问题的求解, 参见文献 [4] 第二章的禁忌搜索算法例 2. 2. 该问题的初始调配表形式, 如图 4 所示. 按照元素判别值数学模型, 计算各个元素的判别值, 填入图 4 中. 相应的元素判别值为

$$
\begin{array}{llll}
dX_{11}=0, & dX_{12}=6, & dX_{13}=7, & dX_{14}=5,\\
dX_{21}=6, & dX_{22}=0, & dX_{23}=5, & dX_{24}=6,\\
dX_{31}=6, & dX_{32}=5, & dX_{33}=0, & dX_{34}=7,\\
dX_{41}=5, & dX_{42}=7, & dX_{43}=5, & dX_{44}=0.
\end{array}
$$

第 1 种求解方法是, 按旅行问题的求解法求解. (1) 第 1 行元素判别值最大为 $dX_{13}=7$, 其对应

城 市	A	B	C	D	城市选数
A	50 X_{11} 0	1 X_{12} 6	0.5 X_{13} 7 √	1 X_{14} 5	1*(1)
B	1 X_{21} 6	50 X_{22} 0	1 X_{23} 5	1 X_{24} 6 √	1
C	1.5 X_{31} 6 *	5 X_{32} 5	50 X_{33} 0	1 X_{34} 7	1*(2)
D	1 X_{41} 5	1 X_{42} 7 √	1 X_{43} 5	50 X_{44} 0	1*(3)
城市选数	1	1*(3)	1*(1)	1*(2)	4 / 4

图 4　非对称 TSP 问题调配结果

的元素是 X_{13}. 对第 1 行和第 3列作标志, 并给 X_{13} 作选择标志, 对 X_{31} 作失去调配权利的标志. (2) $j_0=j=3$, 在第 3 行具有调配权利的元素中, 其最大的元素判别值是 7, 相应元素为 X_{34}. 因此, 选 X_{34}, 对第 3 行和第 4 列作标志, 且给 X_{34} 作选择标志. 因 X_{43} 处于失去调配权利的第 4 列, 故可不必别作标志. (3) $j_0=j=4$, 在第 4 行具有调配权利的元素中, 其最大的元素判别值是 7, 相应元素为 X_{42}. 对第 4 行和第 2 列作标志, 且给 X_{42} 作选择标志, 对 X_{24} 作失去调配权利的标志. (4) 最后, 必须由 B 回到出发点 A. 故调配完成, 所获得的解是最优解. 其旅行路线为 $X_{13}\to X_{34}\to X_{42}\to X_{21}$. 其对应的城市为 $A\to C\to D\to B\to A$, 全部耗费为 0. 5+ 1+ 1+ 1= 3. 5.

这与该书使用局部搜索算法, 以及蒙特卡罗算法跳出局部最优解而得到的解一致. 非对称的 TSP 问题, 可作为调运问题的特例进行处理. 这就是说每个城市的"供应量"和"需求量"都

等于 1, 而供应点和需求点的个数相等. 其对角线上元素的耗费为 0, 在求解中要转换为足够大的正数 m, 或视为∞.

第 2 种求解方法是, 按调运问题的求解法求解. 该题可按调运问题的方法求解, 则按照元素判别值的大小进行调配. (1) 调配表中, 元素判别值最大为 7, 则 3 个元素 $dX_{13} = dX_{34} = dX_{42} = 7$. 因 X_{13} 的耗费只为 0.5, 比其它两个都省. 于是, 对 X_{13} 进行调配, 且对 X_{13} 所在的行和列作标志. (2) 在余下未调配的、具有调配权的元素中, 元素判别值最大的有, $dX_{34} = dX_{42} = 7$. 在这两个元素的耗费皆为 1, 可按元素下标的顺序进行选择. 于是, 可对 X_{34} 进行调配, 且对 X_{34} 所在的行和列作标志. (3) 在余下未调配的、具有调配权的元素中, 元素判别值最大的为 $dX_{42} = 7$. 这元素只有 1 个, 于是对 X_{42} 进行调配, 对 X_{42} 所在的行和列作标志. (4) 在余下未调配的、具有调配权的元素中, 元素判别值最大的有 $dX_{21} = dX_{24} = 6$. 这两个元素的耗费皆为 1, 而 X_{21} 在 X_{24} 的前面. 于是, 可对 X_{21} 进行调配, 对 X_{21} 所在的行和列作标志. 至此, 全部调配完成, 所得到调配的元素有 X_{13}, X_{34}, X_{42}, X_{21}. 其结果同第 1 种解法相同, 仍然为最优解.

例 **3**　文献[5]中第七章第四节的货郎担问题. 其具体数据, 如图 5 所示. 元素判别值计算取值, 填入图 5 的各个元素子左下方. C_{ii} 所取的 m 值, 在程序中为

$$m = 10 \times (\max C_{ii}) = 10 \times 7 = 70.$$

该题是非对称 TSP 问题, 一般按元素判别值的调运求解. 其本身是 TSP 问题, 在调配过程应采取消除子环的方法. (1) 元素判别值最大为 $dX_{34} = 13$, 故 $X_{34} = 1$. 在第 3 行和第 4 列, 以

城市	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	城市选数
A_1	70 X_{11} 0	2 X_{12} 12 *	0 X_{13} 11 1	6 X_{14} 7	1 X_{15} 10	1*(4)
A_2	1 X_{21} 12 1	70 X_{22} 0	4 X_{23} 7	4 X_{24} 11	2 X_{25} 10	1*(2)
A_3	5 X_{31} 8 *	3 X_{32} 11	70 X_{33} 0	1 X_{34} 13 1	5 X_{35} 8	1*(1)
A_4	4 X_{41} 8	7 X_{42} 8	2 X_{43} 12 *	70 X_{44} 0	1 X_{45} 12 1	1*(3)
A_5	2 X_{51} 12	6 X_{52} 9 1	3 X_{53} 0	6 X_{54} 9 *	70 X_{55} 0	1*(5)
城市选数	1*(2)	1*(5)	1*(4)	1*(1)	1*(3)	5 / 5

图 5　货郎担问题求解结果

及 X_{43} 置上相应标志. (2) 具有分配权、尚未分配的元素中, 其判别值最大的有 dX_{12}, dX_{21}, dX_{43}, dX_{45} 和 dX_{51} 皆等于 12. 因 X_{21} 的旅费 $C_{21} = 1$(小于 X_{12}) 且先于其它元素, 故给 X_{21} 进行调配, 则得 $X_{21} = 1$. 对第 2 行, 第 1 列和 X_{12} 作标志. (3) 因 $dX_{45} = 12$, 且 $C_{45} = 1$, 故对 X_{45} 进行调配, 则得 $X_{45} = 1$. 在第 4 行, 第 5 列和 X_{54} 作标志. (4) 余下未分配且具有分配权的元素中, 判别值最大的为 $dX_{13} = 11$, 则 $X_{13} = 1$. 对第 1 行, 第 3 列和 X_{31} 作标志. (5) 现仅有 X_{52} 有分配权, 且

$dX_{52}=9$. 所以 $X_{52}=1$, 并对相应行列作标志. 至此, 求解完成, 结果如图 5 所示. 最小旅费为 0 + 1+ 1+ 1+ 6= 9, 得到分配的元素有 X_{13}, X_{34}, X_{45}, X_{52}和 X_{21}. 其货郎的路线为 $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1$. 这个结果同原书答案一致, 为最优解.

3 结束语

使用元素判别值分配法求解 TSP 问题, 具有明显的优越性. (1) 元素判别值的数学模型简单, 计算方便. (2) 求解方程和算法简便, 易于理解和掌握. (3) 一般问题只需一次分配可获最优方案. 这是现行方法所无法实现的. 当然, 尚有一些问题, 如城市数目成百个的问题需进一步的研究和探讨. 该方法已编制成程序, 可在微机上运行. 其实现算法可参看文献 [2,3].

参 考 文 献

1 张银明. 调运问题的新解法——元素判别值分配法的研究与实现[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(4): 447～453

2 张银明. 元素判别值分配法及其算法设计[J]. 计算机工程与应用, 1995, 31(6): 25～31

3 张银明, 张谋东. 调运、指派和货郎担问题的通用解法的研究——算法设计及其程序实现[J]. 计算机工程与应用, 1996, 32(1): 26～31

4 邢文训, 谢金星. 现代优化计算方法[J]. 北京: 清华大学出版社, 1990. 79～102

5 吴文江, 袁仪方. 实用数学规划[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993. 175～233

Application of the Allocation of Element Discrimination Value to the Solution of Traveling Salesman Problem

Zhang Yinming

(College of Info. Sci. & Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For solving traveling salesman problem (TSP), a new method quite different from the one commonly use is worked out. The method is based upon the allocation of element discrimination value. The value is a weighted value, of which the element is allocable and chosen and is comprehensively computed. Consequently, this new method will serve as a basis for the allocation and the ehoice of element. In case the method is used for solving TSP, it needs only once allocation to get optimal plan and needs not any adjustment.

Keywords traveling salesman problem, allocation of element discrimination value, operational research, transportation dispatching