第 23 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 23　No. 2
2002 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2002

文章编号　1000-5013(2002)02-111-05

线性积分微分方程的周期解的存在唯一性

王　全　义

(华侨大学数学系, 泉州 362011)

摘要　给出一类具有时滞的线性积分方程和线性积分微分方程, 存在唯一的周期解的充分必要条件. 后举两个例子说明, Burton 提出的有关这两类线性方程的解的渐近稳定性的公开问题中的那些条件, 不仅不能保证其解的渐近稳定性, 而且也不能保证其解的稳定性.

关键词　积分微分方程, 周期解, 唯一性, 稳定性

中图分类号　O 175.6　　　文献标识码　A

1　问题的提出

考虑具有时滞的纯量线性积分微分方程和线性积分方程:

$$x'(t) = p(t) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \quad C'(t) > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \alpha x(t-h) + p(t) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \quad C'(t) \geq 0, \quad |\alpha| < 1, \tag{2}$$

其中

$$p(t+T) = p(t), \qquad \int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s = 0, \qquad h\ \text{为一常数}. \tag{3}$$

在文[1]中, Burton 给出了如下定理:

定理 I　方程(1)及方程(2)具有唯一的 T-周期解.

在文[2]中, 我们给出了两个反例, 说明上述定理 I 的结论是不正确的. 同时, 指出上述定理 I 应改正为如下的两个定理之一.

定理 A　方程(1)及方程(2)至少存在一个 T-周期解.

定理 B　方程(1)及方程(2)存在唯一的具有平均值为零的 T-周期解.

本文首先研究在什么条件下, 方程(1)及方程(2)具有唯一的 T-周期解(当然这里不要求此周期解的平均值等于零)这个问题. 此外, Burton 在文[1]中还提出了如下的公开问题.

问题 1[1]　当 $p(t)\equiv 0$ 时, 我们的定理的结论能否改成渐近稳定. 关于这个公开问题, 在文[2]中, 我们已给出两个例子说明 Burton 在这个问题中的条件, 并不能保证方程(1)及方程

收稿日期　2001-12-20　　作者简介　王全义(1955-), 男, 教授
基金项目　福建省自然科学基金资助项目

(2)(当 $p(t)\equiv 0$ 时),其解的渐近稳定性. 从而,解决了 Burton 的这个公开问题. 现在的问题是,Burton 的公开问题中的条件能否保证方程(1)及方程(2)(当 $p(t)\equiv 0$ 时),其解的稳定性的问题. 这就是本文将要解决的第 2 个问题. 我们将在节 3 中给出两个例子,说明 Burton 的公开问题的条件,也不能保证方程(1)及方程(2)(当 $p(t)\equiv 0$ 时)其解的稳定性.

2 存在唯一的周期解的充要条件

在本节,我们将给出方程(1)及方程(2)存在唯一的 T-周期解的充要条件. 考虑如下的具有时滞的纯量线性方程

$$x'(t) = p(t) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \qquad C'(t) > 0, \tag{4}$$

$$x(t) = \alpha x(t-h) + p(t) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \qquad C'(t) \geq 0, \qquad \alpha < 1, \tag{5}$$

其中 $p(t)$ 为连续的 T-周期函数,h 是一常数. 首先假设下列条件为

$$a \triangleq \int_0^T C(s)\,\mathrm{d}s \neq 0, \tag{6}$$

$$b \triangleq \alpha - \int_0^T C(s)\,\mathrm{d}s \neq 1. \tag{7}$$

先证下面引理:

引理 1 设 $f(t)$ 是连续的 T-周期解函数,则对任意的 $\tau\in R$,有

$$\int_0^T f(t+\tau)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 因为

$$\int_0^T f(t+\tau)\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=t+\tau} \int_\tau^{T+\tau} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\tau^T f(u)\,\mathrm{d}u + \int_T^{T+\tau} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

而

$$\int_T^{T+\tau} f(u)\,\mathrm{d}u \xlongequal{u=t+r} \int_0^\tau f(T+r)\,\mathrm{d}r = \int_0^\tau f(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^\tau f(u)\,\mathrm{d}u.$$

上述两式结合起来,即得

$$\int_0^T f(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理 1 方程(4)存在唯一的 T-周期解的充要条件是式(6)成立.

证明 先证必要性. 假设方程(4)存在唯一的 T-周期解 $x_0(t)$. 如果 $a=\int_0^T C(s)\,\mathrm{d}s = 0$,则对于任意的常数 $C\neq 0$,容易验证 $x_1(t) = x_0(t) + C$ 必是方程(4)的 T-周期解. 显然 $x_1(t)\neq x_0(t)$,从而与方程(4)具有唯一的 T-周期解的假设相矛盾. 因此必有 $a=\int_0^T C(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$.

再证充分性. 由于 $a=\int_0^T C(s)\,\mathrm{d}s\neq 0$,故可令 $x_0=\dfrac{p_0}{a}$,这里 $p_0=\dfrac{1}{T}\int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s$. 作变量替换 $x=y+x_0$,于是方程(4)可化为

$$y'(t) = p_1(t) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

其中 $p_1(t)=p(t)-p_0$. 显然有

$$\int_0^T p_1(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

由于方程(8)满足文[2]中定理 B 的所有条件，因此方程(8)存在唯一的具有平均值为零的 T-周期解 $y_0(t)$．于是 $y_0(t)$ 必是方程(8)的唯一的 T-周期解．因为否则的话，可设方程(8)存在另一个 T-周期解 $y_1(t)$，$y_1(t) \neq y_0(t)$．由文[2]中定理 B 可知必有

$$d_1 \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T y_1(s)\,\mathrm{d}s \neq 0.$$

把 $y_1(t)$ 代入方程(8)，由方程两边从 0 积分到 T，并且由引理 1，我们得

$$0 = \int_0^T y_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T p_1(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^T\int_{-T}^T C(t-s)y_1(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t =$$

$$-\int_0^T\int_{-T}^t C(t-s)y_1(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-s} -\int_0^T\left[\int_0^T C(u)y_1(t-u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t =$$

$$-\int_0^T C(u)\left[\int_0^T y_1(t-u)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u = -d_1T\int_0^T C(u)\,\mathrm{d}u = -ad_1T \neq 0,$$

这就发生了矛盾．因此方程(8)的 T-周期解是唯一的，从而方程(4)的 T-周期解是唯一的．定理 1 证毕．

定理 2　方程(5)存在唯一的 T-周期解的充要条件是式(7)成立．

证明　先证必要性．假设方程(5)存在唯一的 T-周期解 $x_0(t)$．如果 $b = \alpha - \int_{-T} C(s)\,\mathrm{d}s = 1$，则对任意的常数 $C \neq 0$，容易验证 $x_1(t) = x_0(t) + C$ 也是方程(5)的 T-周期解．由于 $x_1(t) \neq x_0(t)$，这就发生了矛盾．因此必有 $b = \alpha - \int_0^T C(s)\,\mathrm{d}s \neq 1$．

再证充分性．由于 $b = \alpha - \int_0^T C(s)\,\mathrm{d}s \neq 1$，所以我们可令 $x_0 = \frac{p_0}{1-b}$，这里 $p_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s$．作变量替换 $x = y + x_0$，于是方程(5)可化为 $y(t) + x_0 = \alpha[y(t-h) + x_0] + p(t) - \int_{-T} C(t-s)[y(s) + x_0]\,\mathrm{d}s$．所以，$y(t) = \alpha y(t-h) + (\alpha - 1)x_0 + p(t) - \int_{-T} C(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s + (b-\alpha)x_0$．即

$$y(t) = \alpha y(t-h) + p_1(t) - \int_{-T} C(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

这里 $p_1(t) = p(t) - p_0$．显然有 $\frac{1}{T}\int_0^T p_1(s)\,\mathrm{d}s = 0$．由于方程(9)满足文[2]中定理 B 的所有条件，因此方程(9)存在唯一的具有平均值为零的 T-周期解 $y_2(t)$．于是 $y_2(t)$ 必是方程(9)的唯一的 T-周期解．因为否则的话，可设方程(9)存在另一个 T-周期解 $y_3(t)$，$y_3(t) \neq y_2(t)$．于是由文[2]中的定理 B 可知，必有 $d_3 \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T y_3(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$．把 $y_3(t)$ 代入方程(9)，由方程的两边同时从 0 积分到 T，并且根据引理 1，我们有

$$d_3T = \int_0^T y_3(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_0^T y_3(t-h)\,\mathrm{d}t + \int_0^T p_1(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^T\left[\int_{-T}^t C(t-s)y_3(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t =$$

$$\alpha d_3T + 0 - \int_0^T\left[\int_{-T}^t C(t-s)y_3(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-s} \alpha d_3T - \int_0^T\left[\int_0^T C(u)y_3(t-u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t =$$

$$\alpha d_3 T - \int_0^T C(u)\left[\int_0^T y_3(t-u)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u = \alpha d_3 T - d_3 T\int_0^T C(u)\,\mathrm{d}u = b d_3 T,$$

即有$(b-1)d_3T = 0$. 由于 $d_3T \neq 0$, 因此 $b = 1$, 这与式(7) 相矛盾. 这个矛盾说明方程(9) 的 T-周期解是唯一的, 从而方程(5) 的 T-周期解是唯一的. 定理 2 证毕.

注 1 在定理 1 及定理 2 中, 并不需要假设 $p(t)$ 的平均值等于零.

3 线性方程解的稳定性问题

在本节, 我们将给出两个例子说明 Burton 的公开问题的条件也不能保证线性方程的解的稳定性. 考虑下列具有滞量的纯量线性方程

$$x'(t) = -\int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \qquad C''(t) > 0, \tag{10}$$

$$x(t) = \alpha x(t-h) - \int_{t-T}^{t} C(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \qquad C''(t) \geq 0, \quad |\alpha| < 1,\ h \text{ 为一常数}, \tag{11}$$

这里 $T > 0$, $h > 0$. 记 $T_1 = \max\{T, h\}$. 又设 $t_0 \geq 0$, 并记 $CB_1 = \{\varphi(t) \mid \varphi: [t_0 - T, t_0] \to R$ 有界且连续$\}$, $CB_2 = \{\varphi(t) \mid \varphi: [t_0 - T_1, t_0] \to R$ 有界且连续$\}$. 方程(10) 满足初始条件 $x(s) = \varphi(s)$, $s \in [t_0 - T, t_0]$ (这里 $\varphi \in CB_1$) 的解记为 $x(t, t_0, \varphi)$, $t \geq t_0 \geq 0$. 方程(11) 满足初始条件 $x(s) = \varphi(s)$, $s \in [t_0 - T_1, t_0]$ (这里 $\varphi \in CB_2$) 的解记为 $x(t, t_0, \varphi)$, $t \geq t_0 \geq 0$.

定义 1[3] 方程(10) 的解 $x(t, t_0, \varphi)$ 被称为不稳定的. 如果存在 $\epsilon_0 > 0$, 不论 $\delta > 0$ 选得多么小, 总有 $\Psi \in CB_1$ 满足 $|\varphi(s) - \Psi(s)| < \delta$, $s \in [t_0 - T, t_0]$, 以及 $t_1 > t_0$, 使得

$$|x(t_1, t_0, \varphi) - x(t_1, t_0, \Psi)| = \epsilon_0,$$

其中 $x(t, t_0, \Psi)$ 也是方程(10) 的解.

定义 2 方程(11) 的解 $x(t, t_0, \varphi)$ 被称为不稳定的. 如果存在 $\epsilon_0 > 0$, 不论 $\delta > 0$ 选得多么小, 总有 $\Psi \in CB_2$ 满足 $|\varphi(s) - \Psi(s)| < \delta$, $s \in [t_0 - T_1, t_0]$, 以及 $t_1 > t_0$, 使得

$$|x(t_1, t_0, \varphi) - x(t_1, t_0, \Psi)| = \epsilon_0,$$

其中 $x(t, t_0, \Psi)$ 也是方程(11) 的解.

例 1 考虑如下的线性积分微分方程

$$x'(t) = -\int_{t-2\pi}^{t}\left[\mathrm{e}^{t-s} - \frac{1 + 2\pi}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}}\right]x(s)\,\mathrm{d}s. \tag{12}$$

这是具有 $T = 2\pi$, $C(t) = \mathrm{e}^{t} - \dfrac{1 + 2\pi}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}}$ 的方程(10). 下面将证明方程(12) 的任一解都是不稳定的. 事实上, 直接验证可知, 方程(12) 具有一个解 $x(t, t_0, \varphi_1) = a\mathrm{e}^{t}$, $t \geq t_0 \geq 0$. 这里, $\varphi_1(s) = a\mathrm{e}^{s}$, $s \in [t_0 - 2\pi, t_0]$, 而 a 为任意常数. 设 $x(t, t_0, \varphi)$ 是方程(12) 的任意一个解, $\varphi \in CB_1$. 由于方程(12) 是齐次线性方程, 因此 $y(t, t_0, \varphi_2) = x(t, t_0, \varphi) + x(t, t_0, \varphi_1)$ 是方程(12) 满足初始条件 $\varphi_2(s) = \varphi(s) + \varphi_1(s) = \varphi(s) + a\mathrm{e}^{s}$, $s \in [t_0 - 2\pi, t_0]$ (因为 $\varphi \in CB_1$, 所以 $\varphi_2 \in CB_1$) 的解. 因此, 对 $\epsilon_0 = 1$, 无论 $\delta > 0$ 多么小, 可取 $a = \dfrac{\delta \mathrm{e}^{-t_0}}{2}$. 于是 $|\varphi(s) - \varphi_2(s)| = |a\mathrm{e}^{s}| = \dfrac{\delta}{2}\mathrm{e}^{s - t_0} < \delta$, $s \in [t_0 - 2\pi, t_0]$. 但是, 当 $t_1 = t_0 + \ln \dfrac{2}{\delta}$ 时, 有

$$|x(t_1, t_0, \varphi) - y(t_1, t_0, \varphi_2)| = |a\mathrm{e}^{t_1}| = 1 = \epsilon_0.$$

因此方程(12) 的解 $x(t, t_0, \varphi)$ 是不稳定的. 由于 $x(t, t_0, \varphi)$ 是方程(12) 的任意一个解. 因此方

程(12)的任一解都是不稳定的.

例 **2** 考虑具有时滞的纯量线性积分方程

$$x(t)=\frac{1}{2}x(t-1)-\int_{-1}^{t}\left[e^{t-s}-\frac{4-e^{-1}}{2(1-e^{-1})}\right]x(s)\,ds. \tag{13}$$

这是具有 $\alpha=\frac{1}{2}, T=h=1$ 且 $C(t)=e^{t}-\frac{4-e^{-1}}{2(1-e^{-1})}$ 的方程(11). 下面将证明方程(13)的任一解都是不稳定的. 事实上, 直接验证可知, 方程(13)具有一个解 $x(t,t_0,\varphi_1)=ae^{t}$, $t\geq t_0\geq 0$, 其中 $\varphi_1(s)=ae^{s}$, $s\in[t_0-1,t_0]$, 而 a 为任意常数. 设 $x(t,t_0,\varphi)$ 是方程(13)的任一解. 由于方程(13)是齐次线性方程, 因此 $y(t,t_0,\varphi_2)=x(t,t_0,\varphi)+x(t,t_0,\varphi_1)$ 是方程(13)满足初始条件

$$\varphi_2(s)=\varphi(s)+\varphi_1(s)=\varphi(s)+ae^{s},\ s\in[t_0-1,t_0]$$

的解(显然 $\varphi_2\in CB_2$). 于是, 对 $\epsilon_0=1$, 不论 $\delta>0$ 多么小, 取 $a=\frac{\delta e^{-t_0}}{2}$, 则有

$$|\varphi(s)-\varphi_2(s)|=|ae^{s}|=\frac{\delta}{2}e^{s-t_0}<\delta,\quad s\in[t_0-1,t_0].$$

然而, 当 $t_1=t_0+\ln\frac{2}{\delta}$ 时, 有

$$|x(t_1,t_0,\varphi)-y(t_1,t_0,\varphi_2)|=|ae^{t_1}|=\frac{\delta}{2}e^{t_1-t_0}=1=\epsilon_0.$$

这说明方程(13)的解 $x(t,t_0,\varphi)$ 是不稳定的. 由于 $x(t,t_0,\varphi)$ 是方程(13)的任意一个解, 故方程(13)的任一解都是不稳定的.

注 **2** 上述这两个例子说明 Burton 的公开问题 1 的条件, 不仅不能保证线性方程(10)及(11)的解的渐近稳定性, 而且也不能保证其解的稳定性. 至于方程(10)及(11)的解的稳定性及渐近稳定性的条件是什么, 我们正在研究之中, 以后将另文发表.

参 考 文 献

1 Burton T A. Linear integral equations and periodicity[J]. Ann. of Diff. Eqs., 1997, 13(4): 313～326

2 王全义. 线性微分方程的周期解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2001, 22(3): 117～121

3 郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1994. 229～298

Existence and Uniqueness of Periodic Solutions to Linear Integrodifferential Equations

Wang Quanyi

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Concerning the solutions to a class of linear integral equations with time-lag and a class of linear integrodifferential equations, the author gives necessary and sufficient conditions for the existence and the uniqueness of periodic solutions to them, and exemplifies that those conditions advanced by Burton in open problem for the asymptotic stability of their solutions not only unable to pledge the asymptotic stability of their solutions but also unable to pledge the stability of their solutions.

Keywords integrodifferential equation, periodic solution, uniqueness, stability