

文章编号 1000-5013(2002) 01-040-05

框架结构二阶位移实用计算

黄 庆 丰

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 基于框架结构剪切型变形的特点, 将框架结构等效为层间剪切模型, 导出一种框架结构二阶效应的实用算法. 算例表明其计算误差较小, 使用简便, 可满足工程设计计算的精度要求. 该方法适用于钢筋混凝土高层框架结构和钢框架.

关键词 高层框架结构, 剪切型, 二阶分析, 杆件

中图分类号 TU 973+ .219 : TU 973+ .15

文献标识码 A

地震作用使高层结构的几何形状发生显著变化, 二阶效应进一步加大结构变形, 并降低结构承载能力. 同样在水平荷载作用下, 结构变形的加大改变了结构的第一自振周期, 反过来又影响结构所受的地震荷载大小和增加结构位移^[1]. 因此, 确定结构二阶位移的计算, 对结构设计有十分重要意义. 引起二阶位移可分为两部分. (1) 由结构竖向构件弦转角 θ 引起 ($P-\Delta$ 效应). (2) 由构件的挠曲引起 (梁-柱效应). 本文讨论杆件二阶理论转角位移表达式^[2]的含义, 将框架结构等效为层间剪切模型, 推导出框架结构二阶层间位移的计算式. 该方法应用简便, 算例表明结果误差较小, 满足工程设计的精度要求.

1 二阶层间位移计算

如图 1 所示, 根据文献 [2, 3] 方法, a 端铰支、 b 刚接杆件的挠曲微分方程为

$$EIy'' = -M_{ab} - V_{ab}x - Py, \quad (1)$$

代入边界条件 $x = 0, y = 0, y' = \varphi_a, x = h, y = 0$ 和杆端剪力弯矩关系式

$$-M_{ba} - M_{ab} + V_{ab}h = 0. \quad (2)$$

可求得

$$M_{ab} = \alpha K \varphi_a, \quad M_{ba} = \beta K \varphi_a. \quad (3)$$

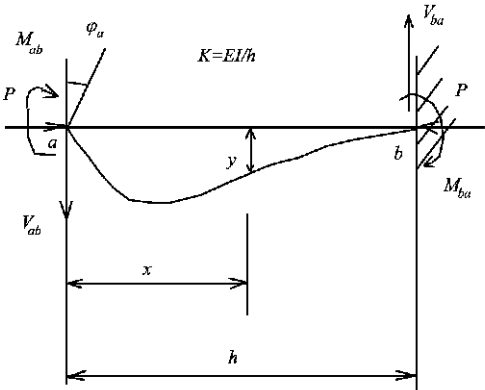


图 1 一端铰接一端刚接杆

同理可知, b 端铰支、 a 端刚接杆的杆端弯矩. 用叠加法可得到两端刚接杆弦转角为 $\theta = \varphi$ 的杆件二阶理论转角位移(图2). 其理论表达式为

$$M_{ba} = M_{ab} = -(\alpha + \beta)K\theta = -(\alpha + \beta)K \frac{\Delta}{h}, \quad (4)$$

式中 $\alpha = \frac{\epsilon \sin \epsilon - \epsilon^2 \cos \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}$, $\beta = \frac{\epsilon^2 - \epsilon \sin \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}$, $\epsilon = h \sqrt{P/(EI)}$, $\theta = \frac{\Delta}{h}$. 其中, α, β 为二阶转角位移方程中的系数. 图2中杆件两端刚接一阶分析转角位移方程中的系数分别为2或4.

由图1及式(4)推导过程可以发现, 杆端附加弯矩 $P\Delta^{(1)}$ 没有被叠加, 该式仅反杆件挠曲二阶位移. 式(4)计算使杆端相对位移较一阶分析增大 δ , 则

$$\Delta = \Delta^{(1)} + \delta.$$

杆端剪力为

$$V_{ab} = V_{ba} = \frac{2(\alpha + \beta)K}{h^2} \Delta \quad (5)$$

图2相应的一阶分析杆端剪力与杆端相对位移关系为

$$V_{ab} = V_{ba} = \frac{12K}{h^2} \Delta^{(1)}.$$

显然, 式(5)蕴涵了附加弯矩 $P\delta$, 有

$$V_{ab} = V_{ba} = \frac{12K}{h^2} \Delta^{(1)} + \frac{P\delta}{h}, \quad (6)$$

$$\left[\frac{2(\alpha + \beta)K}{h^2} - \frac{P}{h} \right] \delta = \frac{2K}{h^2} [6 - (\alpha + \beta)] \Delta^{(1)}. \quad (7)$$

令 $\lambda = \frac{[6 - (\alpha + \beta)]K}{(\alpha + \beta)K - Ph}$, 则

$$\delta = \lambda \Delta^{(1)}, \quad (8)$$

$$\Delta = (1 + \lambda) \Delta^{(1)}. \quad (9)$$

注 上标(1)表示一阶分析值, 上标(2)表示二阶分析值, 下标 i 表示对应结构第 i 层的取值, 下标 j 表示 i 层第 j 柱的柱号.

框架结构等效成的层间剪切模型, 如图3所示. 设 i 层一阶分析层间位移为 $\Delta_i^{(1)}$, 抗推刚度为 D_i , i 层第 j 柱抗推刚度为 D_{ij} , 总的柱线刚度之和为 K_i , i 层第 j 柱线刚度为 $K_{ij} = D_{ij} h_i^2 / 12$. 应用式(4)的求 i 层总的柱两端弯矩, 则有

$$M_{ab,i} = M_{ba,i} = - \sum_{j=1}^n [(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) K_{ij}] \frac{\Delta_i}{h_i}, \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{2 \sum_{j=1}^n [6 - (\alpha_{ij} + \beta_{ij})] K_{ij}}{2 \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) K_{ij} - P_i h_i}, \quad (11)$$

$$\Delta_i = \Delta_i^{(1)} + \delta_i = (1 + \lambda) \Delta_i^{(1)}. \quad (12)$$

在式(10)~(12)中, i 层层间位移增大 δ . 计算附加弯矩 $P\delta$ 作用产生的附加剪力为

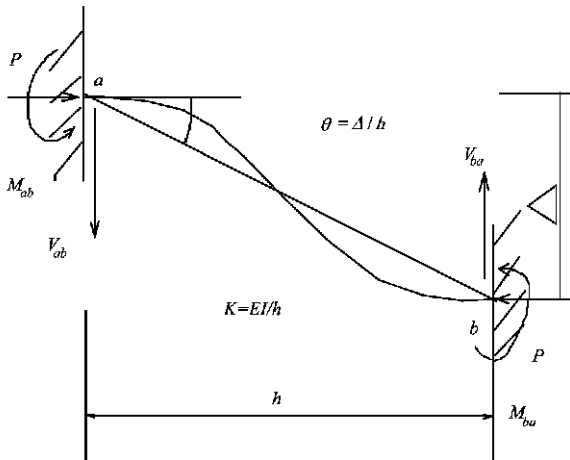


图2 两端刚接杆

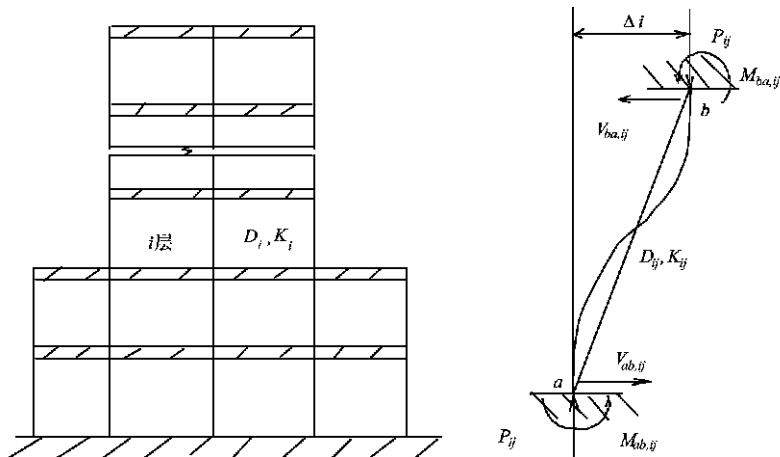


图3 框架结构层间剪切模型

$$V_{ab,i} = V_{ab,i}^{(1)} + \frac{P_i \delta_i}{h_i} = (D_i + \lambda \frac{P_i}{h_i}) \Delta_i^{(1)}, \quad (13)$$

$$V_{ba,i} = - \frac{M_{ab,i} + M_{ba,i}}{h_i} = - \frac{2M_{ba,i}}{h_i}. \quad (14)$$

式(11), (12)的 $\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) K_{ij}$ 为计算挠曲二阶效应时的 i 层各柱折减线刚度, 则

$$D_i = \sum_{j=1}^n D_{ij},$$

$$K_i = \sum_{j=1}^n K_{ij}, \quad \epsilon_j = h_i \frac{P_{ij}}{(EI)_{ij}} = \frac{12P_{ij}}{12P_{ij}/D_{ij}h_i},$$

其中 h_i 为 i 层层高, P_{ij} 为作用于 i 层的竖向荷载.

下面计算 $P-\Delta$ 效应. 式(12) 计算了构件挠曲引起二阶位移的相应附加弯矩 $P_i \delta_i$, 故第 1 次 $P-\Delta$ 效应计算取 i 层附加弯矩 $\sum_{j=1}^n P_{ij} \Delta_i^{(1)} = P_i \Delta_i^{(1)}$, 附加剪力 $(\Delta V_i)_1$ 为

$$(\Delta V_i)_1 = \frac{P_i \Delta_i^{(1)}}{h_i} = - \frac{\Delta M_{ab,i} + \Delta M_{ba,i}}{h_i}. \quad (15)$$

由式(10), (15) 可得

$$\Delta M_{ab,i} + \Delta M_{ba,i} = - 2 \sum_{j=1}^n [(\alpha_j + \beta_j) K_{ij}] \frac{(\delta_i)_1}{h_i}, \quad (16)$$

$$2 \sum_{j=1}^n [(\alpha_j + \beta_j) K_{ij}] \frac{(\delta_i)_1}{h_i} = P_i \Delta_i^{(1)}. \quad (17)$$

式(17) 与式(10) 两边相比, 得 i 层层间位移增加 $(\delta_i)_1$ 为

$$(\delta_i)_1 = - \frac{P_i \Delta_i^{(1)}}{2M_{ba,i}}. \quad (18)$$

综合式(13), (14) 和式(18), 可得

$$(\delta_i)_1 = \frac{P_i}{D_i h_i - (1 - \lambda) P_i} \Delta_i^{(1)}.$$

令 $q_i = \frac{P_i}{D_i h_i - (1 - \lambda) P_i}$, 则附加弯矩 $P_i \Delta_i^{(1)}$ 作用下的 i 层层间位移增大, 有

$$(\delta_i)_1 = q_i \Delta_i^{(1)}, \tag{19}$$

式中 i 层层间位移增加 $(\delta_i)_1$. 将产生附加弯矩 $P(\delta_i)_1$ 的作用, 引起层间位移再次增大 $(\delta_i)_2$. 按上述相同步骤计算, 得

$$(\delta_i)_2 = q_i^2 \Delta_i^{(1)}.$$

由此有一系列 $(\delta_i)_n = q_i^n \Delta_i^{(1)}$, 而

$$\Delta_i^{(2)} = [\Delta_i^{(1)} + (\delta_i)_1 + (\delta_i)_2 + (\delta_i)_3 + \dots] + \delta_i, \tag{20}$$

式中 括号内为系数 q_i 的等比数列, 系数 $q_i < 1$ 结构整体 i 层必然弹性失稳. 系数 $q_i < 1$ 时式 (17) 收敛. 即

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_i^{(1)}}{1 - q_i} + \delta_i. \tag{21}$$

一般情况下认为, $P-\Delta$ 为移作用不会显著增加结构构件的挠曲变形. 剪切模型 i 层柱相应于式 (9) 和式 (11), 有 $\delta_i = \lambda_i \Delta_i^{(1)}$. 故

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{1 + \lambda_i - \lambda_i q_i}{1 - q_i} \Delta_i^{(1)}. \tag{22}$$

令 $\omega = \frac{1 + \lambda_i - \lambda_i q_i}{1 - q_i}$, 有

$$\Delta_i^{(2)} = \omega \Delta_i^{(1)}. \tag{23}$$

称 ω 为二阶计算结构 i 层的层间位移放大系数, 而 $1/\omega$ 为结构 i 层的抗推刚度折减系数.

2 算例

如图 4 所示, 其 10 层钢筋混凝土框架, 其顶层重力荷载为 4.78 Pa, 标准层为 5.747 Pa, 一个开间宽度 9.14 m. 一阶分析位移层间位移及侧向层间抗推刚度已算出, 试计算该结构的二阶层间位移^[6]. 二阶层间位移结果, 如表 1 所示. 表中, h_i 为各层层高, Δ_i^* 为文献所列的计算值, δ_i 为本文与文献 [6] 计算结果的相对误差.

计算时考虑到结构截面沿高没有变化, 同层各柱的系数 $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ 差别不大, 直接以 i 层总柱线刚度计算系数 λ 和 ω 来求各层二阶层间位移. 过程从略.

表 1 一阶及二阶分析层间位移及其数据列表

层号	h_i/m	P_i/mm	$D_i/\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$	$\Delta_i^{(1)}/\text{mm}$	$\Delta_i^{(2)}/\text{mm}$	Δ_i^*/mm	$\delta_i/(%)$
10	3.657	801	10 242	13.13	13.47	13.56	- 0.6
9	3.657	1 762	12 422	18.69	19.59	19.51	0.4
8	3.657	2 723	16 010	19.94	21.11	20.95	0.7

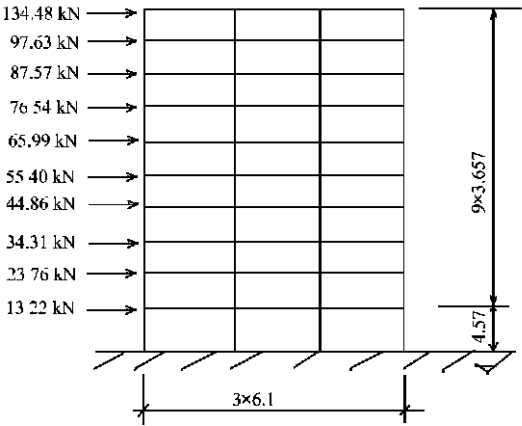


图 4 10 层框架简图 (m)

续表

层号	h_i/m	P_i/mm	$D_i/\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$	$\Delta_i^{(1)}/\text{mm}$	$\Delta_i^{(2)}/\text{mm}$	Δ_i^*/mm	$\delta/(\%)$
7	3.657	3 684	17 176	23.04	24.76	24.46	1.2
6	3.657	4 645	20 225	22.83	24.67	24.36	1.3
5	3.657	5 607	22 271	23.22	25.28	24.90	1.5
4	3.657	6 568	26 399	21.29	23.16	22.88	1.2
3	3.657	7 529	27 082	22.02	24.20	23.75	1.9
2	3.657	8 490	31 782	19.51	21.36	21.01	1.7
1	4.572	9 451	32 593	19.43	21.01	20.77	1.1

3 结 束 语

本文方法同时考虑了 $P-\Delta$ 效应和梁-柱效应. 该法计算误差较小、结果安全, 适用于如框架、钢框架、剪切型框-剪结构等剪切型交形结构. 文中系数 $q_i=1$ 是 i 层二阶层间位移发散的临界值. 若只考虑 $P-\Delta$ 效应, 对应 i 层竖向力的临界值 $P_{i\text{c}}=D_i h_i$, 结构不稳定时, 二阶位移放大系数 $2^{(6)}$. 必须指出的是, 上述临界值系结构构件按弹性计算的结果, 实际结构可能在二阶位移达到临界值之前已弹塑性失效.

参 考 文 献

1 陈以新, 林建华. 结构参数变异对框剪地震响应的影响[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2000, 21(1): 40~44
2 世川和郎著. 结构的弹塑性稳定内力[M]. 王松涛等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1992. 30~33
3 杨天祥. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979. 152~157
4 李少泉. 结构二阶效应的简化计算[J]. 建筑结构, 1998, (9): 34~36
5 刘建新. 高层建筑 $P-\Delta$ 效应的实用算法[J]. 建筑结构, 1995, (2): 38~41

Practical Calculation of Second-Order
Displacement of a Frame Structure

Huang Qingfeng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Based on the characteristic of shear deformation of a frame structure, the author makes the frame structure equivalent to an interlayer shear model, and derives a practical algorithm for second-order effect of a frame structure. As shows by example of calculation, it is a handy method with small error of calculation. It can be met with the demand of accuracy in calculation of engineering design. It is suitable for use in high-rise frame structure of reinforced concrete and also steel frame.

Keywords high-rise frame structure, shear type, second-order analysis, member