

文章编号 1000-5013(2002)01-016-03

# Baskakov 算子的收敛速度的估计

王平华 林丽玉

(泉州师范学院数学系, 泉州 362000)

**摘要** 对概率型 Baskakov 算子  $B_n^*(f, x)$  在  $(0, +\infty)$  上, 收敛于  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  的收敛性进行研究. 利用概率论的方法, 对 Guo 和 Khan 关于  $B_n^*(f, x)$  收敛速度的估计作进一步的改进, 得到更精确的系数估计.

**关键词** Baskakov 算子, 收敛速度, 系数估计

中图分类号 O 174.41

文献标识码 A

## 1 问题的提出

如果  $f(x)$  为  $[0, +\infty)$  上的可测函数, 对一切  $x \in (0, +\infty)$ , 则有

$$B_n^*(f, x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k \left(\frac{1}{1+x}\right),$$

称之为 Baskakov 算子. 与文 [1] 一样, 对 Baskakov 算子给出极限, 即

$$\lim_n B_n^*(f, x) = [f(x^+) + f(x^-)]/2.$$

记  $\hat{f}(x) = [f(x^+) + f(x^-)]/2$ , 把区间  $I$  上的有界变差函数  $f$  记为  $f \in \text{BV}(I)$ .

文 [2] 给出 Baskakov 算子的收敛速度. 若  $f \in \text{BV}[0, +\infty)$ , 对一切  $x \in (0, +\infty)$ , 则

$$|B_n^*(f, x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{2x(x+1) + 1}{n} \sum_{k=0}^n V_{I_k}(g_x) + \frac{2(16x^2 + 9x + 1)}{(1+x)^{3/2} nx} \tilde{f}(x). \quad (1)$$

在式(1)中,  $I_k = [x - 1/\sqrt{k}, x + 1/\sqrt{k}]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $I_0 = (-\infty, +\infty)$ ,  $V_1(f)$  表示  $f$  在区间  $I$  上的全变差,  $\tilde{f}(x) = |f(x^+) - f(x^-)|$ , 以及

$$g_x(x) = \begin{cases} f(t) - f(x^+) & t > x, \\ 0 & t = x, \\ f(t) - f(x^-) & t < x. \end{cases} \quad (2)$$

文献 [3] 对式(1)进行改进, 所得的结果为

$$|B_n^*(f, x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{2x(x+1) + 1}{n} \sum_{k=0}^n V_{I_k}(g_x) + \frac{2(4x^2 + 3x + 1)}{(1+x)^{3/2} nx} \tilde{f}(x). \quad (2)$$

本文在上述的基础上, 给出一些主要结果.

## 2 主要结果

定理 1 如果  $f \in BV[0, +\infty)$ , 对一切  $x \in (0, +\infty)$ , 则

$$|B_n^*(f, x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{2x(x+1) + 1}{n} \sum_{k=0}^n V_{I_k}(g_x) + \frac{6}{nx} \overline{\tilde{f}}(x). \quad (3)$$

比较式 (2), (3), 则有定理 2.

定理 2 如果  $f \in BV[0, +\infty)$ , 对一切  $x \in (0, +\infty)$ , 则

$$|B_n^*(f, x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{2x(x+1) + 1}{n} \sum_{k=0}^n V_{I_k}(g_x) + \frac{2H(x)}{(1+x)^{3/2}} \frac{1}{nx} \tilde{f}(x), \quad (4)$$

其中  $H(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3x + 1, & 0 < x < x_0 \\ 3(x+1)^2, & x > x_0 \end{cases}$ ,  $x_0 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ .

显然, 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $H(x) \leq 4x^2 + 3x + 1$ . 特别的, 当  $x > x_0$  时,  $H(x) < 4x^2 + 3x + 1$ . 可见, 定理 2 中所给的 Baskakov 算子的收敛速度的估计, 比起文 [8] 所给出的更为精确.

## 3 定理的证明

由于概率型算子, 可由几个独立同分布的随机变量之和分布构造. 因此, 设  $\{X_n, n \geq 1\}$  为一列独立同分布的随机变量序列, 且方差有界.  $\text{Var}(X_1) = \sigma^2(x) > 0$ , 三阶中心矩  $E(X_1 - x)^3 = C_3(x)$ .  $\Sigma_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $f \in BV(I)$ , 对于  $f$  定义逼近算子为

$$L_n(f, x) = E\{f(\Sigma_n/n)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t/n) dF_{n,x}(t), \quad (5)$$

其中  $F_{n,x}(t)$  为  $\Sigma_n$  的分布函数. 若  $X_i$  为离散型随机变量, 则式 (5) 可写为

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) P_{n,k}, \quad (6)$$

其中  $P_{n,k}$  为  $\Sigma_n$  的分布列. 对于所定义的  $L_n(f, x)$ , 有

引理 1<sup>[3]</sup> 设  $f \in BV[-\infty, +\infty)$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ . 对于  $n = 1, 2, \dots$ , 有不等式

$$|L_n(f, x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{P(x)}{n} \sum_{k=0}^n V_{I_k}(g_x) + \frac{Q(x)}{n^{1/2}} \tilde{f}(x), \quad (7)$$

其中  $P(x) = 2\sigma^2(x) + 1$ ,  $Q(x) = 2E|X_1 - x|^3 / \sigma^3(x)$ .

引理 2<sup>[3,4]</sup> 设  $X$  为离散型随机变量,  $EX = x > 0$ , 则其三阶中心绝对矩为

$$E|X - x|^3 \leq C_3(x) + 2x^3. \quad (8)$$

下面证明定理 1. 设随机变量序列  $\{X_n, n \geq 1\}$  独立同分布服从几何分布, 即

$$P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{1+x}\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

于是,  $P(\Sigma_n = k) = \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{1}{1+x}\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . 由式 (6) 可得到 Baskakov 算子为

$$L_n(f, x) = B_n^*(f, x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k \left(\frac{1}{1+x}\right).$$

由于  $X_1$  服从分布 (9), 则

$$EX_1 = \sum_{k=0} k \left( \frac{x}{1+x} \right)^k \left( \frac{1}{1+x} \right) = x,$$

$$EX_1^2 = \sum_{k=0} k^2 \left( \frac{x}{1+x} \right)^k \left( \frac{1}{1+x} \right) = 2x^2 + x,$$

$$EX_1^3 = \sum_{k=0} k^3 \left( \frac{x}{1+x} \right)^k \left( \frac{1}{1+x} \right) = 6x^3 + 6x^2 + x,$$

$$EX_1^4 = \sum_{k=0} k^4 \left( \frac{x}{1+x} \right)^k \left( \frac{1}{1+x} \right) = 24x^4 + 36x^3 + 14x^2 + x.$$

而  $E(X_1 - x)^2 = x^2 + x$ ,  $E(X_1 - x)^4 = 9x^4 + 18x^3 + 10x^2 + x$ . 由 Holder 不等式得

$$E|X_1 - x|^3 \leq \sqrt{E(X_1 - x)^2 E(X_1 - x)^4} = 3x(x+1)^2. \quad (10)$$

把上述不等式, 以及

$$\sigma^2(x) = x^2 + x, \quad C_3(x) = 2x^3 + 3x^2 + x \quad (11)$$

代入引理 1 的式 (7), 即可得式 (3). 证毕.

下面证明定理 2. 由定理 1 可知  $E|X_1 - x|^3 \leq 3x(x+1)^2$ , 由引理 2 可知  $E|X_1 - x|^3 \leq 4x^3 + 3x^2 + x$ . 从而

$$E|X_1 - x|^3 \leq \min_{x>0} \{4x^3 + 3x^2 + x, 3x(x+1)^2\}.$$

即

$$E|X_1 - x|^3 \leq \begin{cases} 3x(x+1)^2 & x > x_0, \\ 4x^3 + 3x^2 + x & 0 < x \leq x_0. \end{cases} \quad (12)$$

把式 (11), (12) 代入式 (7), 则式 (4) 成立. 证毕.

## 参 考 文 献

- 1 Herzog F, Hill J D. The Bernstein polynomials for discontinuous functions[J]. Amer. J. Math., 1946, 68: 109~124
- 2 Guo S S, Khan M K. On the rate of convergence of some operators on functions of bounded variation[J]. J. Approx. Theory, 1989, 58: 90~101
- 3 王平华. Szasz 算子和 Baskakov 算子的收敛速度的估计[J]. 泉州师范学院学报, 2001, 19(2): 9~11
- 4 潭观音. 关于 Szasz-Mirakjan 算子推广形式的注记[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2001, 22(4): 337~341

## Estimate on Convergence Rate of Baskakov Operator

Wang Pinghua      Lin Liyu

(Dept. of Math., Quanzhou Normal College, 362011, Quanzhou)

**Abstract** A study is made on the convergence of Baskakov operator  $B_n^*(f, x)$ , a probabilistic operator, converging  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  on  $(0, +\infty)$ . Guo and Khan's estimate to the convergence rate of  $B_n^*(f, x)$  is further improved by using probability method and a more accurate estimate of coefficient is obtained.

**Key words** Baskakov operator, convergence rate, estimate of coefficient