第23卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.23 No.1
2002年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan.2002

文章编号 1000-5013(2002)01-005-07

二维抛物型方程精细积分法与差分法比较

曾 文 平

(华侨大学数学系, 泉州 362011)

摘要 可用单内点子域精细积分法, 求解二维抛物型方程初值问题. 当单内点精细积分中的传递函数即指数函数用 Taylor 展开式的一阶近似来替代时, 精细积分转化为差分方程. 研究这一对应关系, 使各种常见差分格式均找到对应的单点精细积分格式, 并在单点精细积分的一般公式中获得统一表达式.

关键词 二维抛物型方程, 初值问题, 偏微分方程数值解, 精细积分法

中图分类号 O 241.82 文献标识码 A

渗流、扩散和热传导等很多领域经常会遇到求解二维抛物型方程, 通常用有限差分法求解, 有各种不同的差分格式[1,2]. 文[3]对一维抛物型方程提出了精细时程积分法, 该方法可以用大步长, 且十分精确. 但是采用全域积分时, 存储量和计算量都很大. 文[4]提出了子域积分方法. 文[5,6]则进一步指出, 对一维抛物型方程和对流扩散方程, 当内点数为1, 且把指数函数用其 Taylor 展开式的一阶近似来替代时, 各种差分格式可作为单点精细积分格式不同形式的近似. 本文将单内精细积分格式用于二维抛物型方程, 指出相应的差分格式也可视为单点精细积分格式不同形式的近似. 进而给出了不同差分格式在单点精细积分一般公式中的统一表达, 并作了比较研究.

1 计算二维抛物型方程初值问题的精细积分法

考虑二维抛物型方程第一边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad a > 0 \text{ 常数}, 0 < x, y < 1, t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad 0 \le x, y \le 1, \tag{2}$$

$$u(0, y, t) = g_1(y, t), u(1, y, t) = g_2(y, t), \qquad 0 \le y \le 1, t > 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0, t) = h_1(x, t), u(x, 1, t) = h_2(x, t), \qquad 0 \le x \le 1, t > 0. \tag{4}$$

对函数在 x, y 方向离散, 从方便起见设步长 $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{M}$, $x_i = i\Delta x$, $y_i = j\Delta y$, $i, j = 0, 1, \cdots, M$. 于是, 得常微分方程组

收稿日期 2001-10-12 作者简介 曾文平(1940-), 男, 教授

基金项目 福建省自然科学基金资助项目

$$\frac{\mathrm{d}u_{i,j}}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{(\Delta x)^2}\{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})\}, \qquad i,j = 1,2,\cdots,M-1, \tag{5}$$

$$u_{i,j}(0) = u^0_{i,j} = f_{ij}, \qquad i,j = 0,1,\cdots,M, \tag{6}$$

$$u_{0,j}(t) = g_1(y_j,t), \quad u_{M,j}(t) = g_2(y_j,t), \qquad j = 0,1,\cdots,M, \tag{7}$$

$$u_{i,0}(t) = h_1(x_j,t), \quad u_{i,M}(t) = h_2(x_i,t), \qquad i = 0,1,\cdots,M. \tag{8}$$

对式(5)～(8)中的 $u_{i,j} = u(x_i, y_i)$, 用子域积分方法. 子域积分法可以采用不同数量内点. 以一个内点为例, 对式(5)进行移项, 得

$$\frac{\mathrm{d}u_{i,j}}{\mathrm{d}t} + \frac{4a}{(\Delta x)^2}u_{i,j} = \frac{a}{(\Delta x)^2}\{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\}. \tag{9}$$

其通解为

$$u_{i,j}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{4a}{(\Delta x)^2}}u^0_{i,j} + \frac{a}{(\Delta x)^2}\cdot \int \mathrm{e}^{-\frac{4a}{(\Delta x)^2}(t-s)}\{u_{i+1,j}(s) + u_{i-1,j}(s) + u_{i,j+1}(s) + u_{i,j-1}(s)\}\mathrm{d}s. \tag{10}$$

对时间坐标离散化, 步长为 Δt, 第 n 个离散点 $t = t_n = n\Delta t$ 上的 $u_{i,j}$ 值用 $u^n_{i,j}$ ($n = 0,1,2,\cdots$) 表示且有两种积分形式. (a) 积分区间为 $[t_n, t_{n+1}]$, 则

$$u^{n+1}_{i,j} = \mathrm{e}^{-4r}u^n_{i,j} + \frac{a}{(\Delta x)^2}\cdot \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{\frac{-4a}{(\Delta x)^2}(t_{n+1}-s)}\{u_{i+1,j}(s) + u_{i-1,j}(s) + u_{i,j+1}(s) + u_{i,j-1}(s)\}\mathrm{d}s, \tag{11}$$

其中 $r = a\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = a\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$. 假设 $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j+1}$ 及 $u_{i,j-1}$ 分别用常数 $u^*_{i+1,j}, u^*_{i-1,j}, u^*_{i,j+1}$ 及 $u^*_{i,j-1}$ 表示, 则式(11)可用两层显式表示的单点子域积分为

$$u^{n+1}_{i,j} = \mathrm{e}^{-4r}u^n_{i,j} + \frac{1}{4}(1 - \mathrm{e}^{-4r})\{u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} + u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1}\}. \tag{12}$$

(b) 积分区间为 $[t_{n-1}, t_{n+1}]$, 则

$$u^{n+1}_{i,j} = \mathrm{e}^{-8r}u^{n-1}_{i,j} + \frac{a}{(\Delta x)^2}\cdot \int_{n-1}^{n+1} \mathrm{e}^{\frac{-4a}{(\Delta x)^2}(t_{n+1}-s)}\{u_{i+1,j}(s) + u_{i-1,j}(s) + u_{i,j+1}(s) + u_{i,j-1}(s)\}\mathrm{d}s. \tag{13}$$

同样地, 如果 $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j+1}$ 及 $u_{i,j-1}$ 分别用常数 $u^*_{i+1,j}, u^*_{i-1,j}, u^*_{i,j+1}$ 及 $u^*_{i,j-1}$ 表示, 则式(13)可用三层显式表示的单点子域积分为

$$u^{n+1}_{i,j} = \mathrm{e}^{-8r}u^{n-1}_{i,j} + \frac{1}{4}(1 - \mathrm{e}^{-8r})\{u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} + u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1}\}. \tag{14}$$

其中 $u^*_{l,k}$ 通常取 $u^n_{l,k}, u^{n+1}_{l,k}$ 或 $\frac{1}{2}(u^n_{l,k} + u^{n+1}_{l,k})$, $l = i+1, i-1$; $k = j+1, j-1$. 可组成 $u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} + u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1}$ 的多种不同搭配, 本文仅取常用的 7 种搭配形式. (A) $u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} = u^n_{i+1,j} + u^n_{i-1,j}$, $u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1} = u^n_{i,j+1} + u^n_{i,j-1}$. (B) $u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} = u^{n+1}_{i+1,j} + u^{n+1}_{i-1,j}$, $u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1} = u^{n+1}_{i,j+1} + u^{n+1}_{i,j-1}$. (C) $u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} = u^n_{i+1,j} + u^{n+1}_{i-1,j}$, $u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1} = u^{n+1}_{i,j+1} + u^n_{i,j-1}$. (D) $u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} = u^{n+1}_{i+1,j} + u^n_{i-1,j}$, $u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1} = u^{n+1}_{i,j+1} + u^n_{i,j-1}$. (E) $u^*_{i+1,j} + u^*_{i-1,j} = u^n_{i+1,j} + u^{n+1}_{i-1,j}$, $u^*_{i,j+1} + u^*_{i,j-1} = u^n_{i,j+1} +$

$u_{i,j-1}^{n+1}$. (F) $u_{i+1,j}^{*}+u_{i-1,j}^{*}=u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}$, $u_{i,j+1}^{*}+u_{i,j-1}^{*}=u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n+1}$. (G) $u_{i+1,j}^{*}+u_{i-1,j}^{*}=\frac{1}{2}(u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n})$, $u_{i,j+1}^{*}+u_{i,j-1}^{*}=\frac{1}{2}(u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n})$. 于是, 式(12), (14) 各有 7 种不同的精细积分格式.

例如, 式(12) 取搭配(A), 则该式成为 $u_{i,j}^{n+1}=e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{4}(1-e^{-4r})\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$. 式(14) 取搭配(A), 则该式成为 $u_{i,j}^{n+1}=e^{-8r}u_{i,j}^{n-1}+\frac{1}{4}(1-e^{-8r})\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$, 等等. 此外, e^{-4r} 及 e^{-8r} 又有多种不同的近似形式. 例如, 取 Taylor 展开式的一、二阶, 近似便有 $e^{-4r}\approx 1-4r$, $e^{-4r}=\frac{1}{e^{4r}}\approx\frac{1}{1+4r}$, $e^{-4r}=\frac{e^{-2r}}{e^{2r}}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$ 等多种常用形式. 分别代入式(12), (14) 的不同搭配形式, 可得到不同对应的差分格式.

2　精细积分近似表达式与差分格式的对应关系

先考察积分区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上的单点子域精细积分式(12).

(Ⅰ) 取搭配(A) 时的精细积分格式, 并取 $e^{-4r}=1-4r$. 由此可得古典显式格式为

$$u_{i,j}^{n+1}=(1-4r)u_{i,j}^{n}+r\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}, \tag{15}$$

或

$$\frac{(u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n})}{\Delta t}=\frac{a}{(\Delta x)^2}\{(u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n})+(u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n})\}. \tag{16}$$

(Ⅱ) 取搭配(B) 时的精细积分格式, 并取 $e^{-4r}=\frac{1}{e^{4r}}\approx\frac{1}{1+4r}$. 由此可得古典隐式格式为

$$(1+4r)u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n}+r\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}\}, \tag{17}$$

或

$$\frac{(u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n})}{\Delta t}=\frac{a}{(\Delta x)^2}\{(u_{i+1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1})+(u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1})\}. \tag{18}$$

(Ⅲ) 取搭配(C) 时的精细积分格式, 并取 $e^{-4r}=\frac{e^{-2r}}{e^{2r}}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$. 由此可得文 [] 中当 $\alpha=\beta=1$ 的格式, 即

$$(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+r\{u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}. \tag{19}$$

(Ⅳ) 取搭配(D) 时的精细积分格式, 并取 $e^{-4r}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$. 由此可得文 [] 中当 $\alpha=\beta=1$ 的第 2 个格式, 即

$$(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+r\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}. \tag{20}$$

(Ⅴ) 取搭配(E) 时的精细积分格式, 并取 $e^{-4r}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$. 由此可得文 [] 中当 $\alpha=\beta=1$ 的第 3 个格式, 即

$$(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+r\{u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}\}. \tag{21}$$

(Ⅵ) 取搭配(F) 时的精细积分格式, 并取 $e^{-4r}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$, 可得文 [] 中当 $\alpha=\beta=1$ 的第 4 个格式. 即

$$(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+r\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}\}. \tag{22}$$

(Ⅶ) 取搭配(G)时的精细积分格式,并取 $e^{-4r}\approx\dfrac{1-2r}{1+2r}$,可得 Crank-Nicolson 稳式格式. 即

$$(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+\frac{r}{2}\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n}\},\tag{23}$$

或

$$\frac{(u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n})}{\Delta t}=\frac{a}{2(\Delta x)^2}\{(u_{i+1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1})+(u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n})+(u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1})+(u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n})\}.\tag{24}$$

(Ⅷ) 考虑积分区间 $[t_{n-1},t_{n+1}]$ 上,取搭配(A)时的单点子域精细积分式(14),并取 $e^{-8r}\approx\dfrac{1-4r}{1+4r}$. 因此,可得二维抛物型方程的 Dufort-Frankel 格式,即

$$(1+4r)u_{i,j}^{n+1}=(1-4r)u_{i,j}^{n-1}+2r\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\},\tag{25}$$

或

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}=\frac{a}{(\Delta x)^2}\{(u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+u_{i-1,j}^{n})+(u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j-1}^{n})\}.\tag{26}$$

注　根据算例结果和截断误差分析,不同精细积分格式的 3 种近似式中有一种精度最高. 上述讨论的格式即是其精度最高者,其余近似或略去. 因篇幅关系,不再赘述. 为使用及比较方便,8 种搭配分别用数字Ⅰ,Ⅱ,…,Ⅷ表示,带* 号为它们的最佳近似,如表 1 所示. 精细积分近似式与差分格式是一致的,只是表示方法不同而已.

值得注意的是,这些格式在构造并行算法(如分组显式格式等)时将起重要作用[7]. 最后,

表 1　单点精细积分格式和差分格式对照表

方 法	精细积分格式	相应的差分格式
Ⅰ	$u_{i,j}^{n+1}=e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{4}(1-e^{-4r})\cdot\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$	· · * · ·
Ⅰ*	$e^{-4r}\approx1-4r$ $u_{i,j}^{n+1}=(1-4r)u_{i,j}^{n}+r\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$	古典显式格式 $\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\frac{a}{(\Delta x)^2}\{(u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n})+(u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n})\}$
Ⅱ	$u_{i,j}^{n+1}\approx e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{4}(1-e^{-4r})\cdot\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}\}$	* * * * *
Ⅱ*	$e^{-4r}\approx\frac{1}{1+4r}$ $(1+4r)u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n}+r\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}\}$	古典隐式格式 $\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\frac{a}{(\Delta x)^2}\{(u_{i+1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1})+(u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1})\}$
Ⅲ	$u_{i,j}^{n+1}=e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{4}(1-e^{-4r})\cdot\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n}\}$	* * * · ·

续表

方法	精细积分格式	相应的差分格式
III*	$e^{-4r}\approx\frac{1+2r}{1+2r}$ $(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+$ $r\{u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$	半显式格式 $u_{i,j}^{n+1}=\frac{1}{1+2r}\{ru_{i-1,j}^{n+1}+ru_{i,j+1}^{n+1}+$ $(1-2r)u_{i,j}^{n})+ru_{i+1,j}^{n}+ru_{i,j-1}^{n}\}$
IV	$u_{i,j}^{n+1}=e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{4}(1-e^{-4r})\cdot$ $\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n}\}$	* . * * .
IV*	$e^{-4r}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$ $(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+$ $r\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$	半显式格式 $u_{i,j}^{n+1}=\frac{1}{1+2r}\{ru_{i+1,j}^{n+1}+ru_{i,j+1}^{n+1}+$ $(1-2r)u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$
V	$u_{i,j}^{n+1}=e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{4}(1-e^{-4r})\cdot$ $\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n+1}\}$	. * * . *
V*	$e^{-4r}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$ $(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+$ $r\{u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}\}$	半显式格式 $u_{i,j}^{n+1}=\frac{1}{1+2r}\{ru_{i-1,j}^{n+1}+ru_{i,j-1}^{n+1}+$ $(1-2r)u_{i,j}^{n}+ru_{i+1,j}^{n}+ru_{i,j+1}^{n}\}$
VI	$u_{i,j}^{n+1}=e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{4}(1-e^{-4r})\cdot$ $\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n+1}\}$	. . * * *
VI*	$e^{-4r}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$ $(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+$ $r\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}\}$	半显式格式 $u_{i,j}^{n+1}=\frac{1}{1+2r}\{ru_{i+1,j}^{n+1}+ru_{i,j-1}^{n+1}+$ $(1-2r)u_{i,j}^{n}+ru_{i-1,j}^{n}+ru_{i,j+1}^{n}\}$
VII	$u_{i,j}^{n+1}=e^{-4r}u_{i,j}^{n}+\frac{1}{8}(1-e^{-4r})\cdot$ $\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+$ $u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n}\}$	* * * * *
VII*	$e^{-4r}\approx\frac{1-2r}{1+2r}$ $(1+2r)u_{i,j}^{n+1}=(1-2r)u_{i,j}^{n}+$ $\frac{r}{2}\{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n}+$ $u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n}\}$	Crank-Nicolson 隐式格式 $\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\frac{a}{2(\Delta x)^{2}}\{(u_{i+1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}+$ $u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j-1}^{n}+u_{i-1,j}^{n})+(u_{i,j+1}^{n+1}-$ $2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1})+(u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$
VIII	$u_{i,j}^{n+1}=e^{-8r}u_{i,j}^{n-1}+\frac{1}{4}(1-e^{-8r})\cdot$ $\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-}^{n}\}$	. . * . .
VIII*	$e^{-8r}\approx\frac{1-4r}{1+4r}$ $(1+4r)u_{i,j}^{n+1}=(1-4r)u_{i,j}^{n-1}+$ $2r\{u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\}$	DuFort-Frankel 三层显格式 $\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}=\frac{a}{(\Delta x)^{2}}\{(u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+$ $u_{i-1,j}^{n})+(u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n-1}+u_{i,j-1}^{n})\}$

必须指出，显式格式而无条件稳定是有代价的. 这就是相容性的苛刻限制. 因篇幅关系，关于相容性将另文研究.

3 数值试验与初步结论

例 考虑二维抛物型方程混合问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad 0< x,y< 1,t> 0, \tag{27}$$

$$u(x,y,0)=x^2+y^2, \tag{28}$$

$$u(0,y,t)=4t+y^2,\quad u(1,y,t)=4t+1+y^2,\qquad 0\leq y\leq 1,t> 0, \tag{29}$$

$$u(x,0,t)=4t+x^2,\quad u(x,1,t)=4t+1+x^2,\qquad 0\leq x\leq 1,t> 0. \tag{30}$$

其精确解为

$$u(x,y,t)=x^2+y^2+4t. \tag{31}$$

取 $\Delta x=\Delta y=0.1$, 然后取 $\Delta t=0.0025, 0.005$ 及 0.010. 用不同格式进行计算到 $n=1000$, 并与精确解进行比较. 差分计算与对应的精细积分近似计算结果完全相同, 不重复列出. 表 2 中列出了 $n=1000$ 时的部分精确解及不同格式计算结果.

表 2 用不同格式计算例 1 的结果($\Delta x=\Delta y=0.1$)

Δt	0.002 5	0.002 5	0.005	0.005	0.010	0.010
(x,y)	(0.3, 0.2)	(0.7, 0.6)	(0.3, 0.2)	(0.7, 0.6)	(0.3, 0.2)	(0.7, 0.6)
精确解	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0
Ⅰ	10.030 0	10.708 4	19.904 4	20.530 6	39.601 6	40.102 1
Ⅰ*	10.130 0	10.850 0	溢出	溢出	溢出	溢出
Ⅱ	10.201 8	10.951 7	20.248 1	21.017 1	40.289 0	41.075 1
Ⅱ*	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0
Ⅲ	10.115 9	10.830 1	20.076 2	20.773 9	39.945 3	40.588 6
Ⅲ*	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0
Ⅳ	10.115 9	10.830 1	20.076 2	20.773 9	39.945 3	40.588 6
Ⅳ*	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0
Ⅴ	10.115 9	10.830 1	20.076 2	20.773 9	39.945 3	40.588 6
Ⅴ*	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0
Ⅵ	10.115 9	10.830 1	20.076 2	20.773 9	39.945 3	40.588 6
Ⅵ*	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0
Ⅶ	10.115 9	10.830 1	20.076 2	20.773 9	39.945 3	40.588 6
Ⅶ*	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0
Ⅷ	10.076 2	10.773 9	19.945 3	20.588 6	39.614 0	40.119 6
Ⅷ*	10.130 0	10.850 0	20.130 0	20.850 0	40.130 0	40.850 0

从表中可以得出 7 点结论. (1) 古典显式格式Ⅰ* 仅当 $r\leq\frac{1}{4}$ 是有效的, 然而相应的精细积分显格式Ⅰ却不受此限制. 这一点与稳定性分析是一致的. (2) 半显式格式Ⅲ(Ⅲ*)～Ⅵ(Ⅵ*)及三层显格式Ⅷ(Ⅷ*)对任意 $r>0$ 都是有效的. 这与稳定性分析也是一致的. (3) 隐式格式Ⅱ(Ⅱ*)及Ⅶ(Ⅶ*)都是两层格式, 且对任意 $r>0$ 都稳定. 此与理论分析相一致. 然而, 每前进一步都必须解线性代数方程组. (4) 精细积分计算中, 指数函数取精确值的效果不如最好近似式的原因, 是式(11)(或式(12))及式(13)(或式(14))中第 2 项处理粗糙. (5) 不同差分格式可用精细积分统一表达式(11)(或式(12))及式(13)(或式(14))中 e^{-4r} 和 e^{-8r} 取不同近似式, 以及

第 2 项中 $u^*_{i+1,j}+u^*_{i-1,j}+u^*_{i,j+1}+u^*_{i,j-1}$取不同搭配表示. (6) 各种格式的稳定性分析我们已获初步结论. 但由于篇幅关系, 将另文给出. (7) 精细积分的更深层意义为, 该法可同时计算多内点直至全域.

参　考　文　献

1 萨乌里耶夫 B K 著. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎译. 北京: 科学出版社, 1963. 95～107

2 南京大学数学系编. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1979. 75～83

3 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 1～6

4 钟万勰. 子域精细积分与偏微分方程数值解[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 253～260

5 沈为平. 扩散方程单内点精细积分法与差分法比较研究[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, 13(3): 359～363

6 曾文平. 对流扩散方程精细积分法与差分法比较研究[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2001, 22(1): 20～25

7 Evans D J, Abdullah A R B. A new explicit method for the solution of $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$[J]. Intern. J. Computer. Math., 1983, 14: 325～353

Comparison between Meticulous Integration and Difference Method for Solving Two-Dimensional Parabolic Equation

Zeng Wengping

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　The initial-value problem of two-dimensional parabolic equation can be solved by using meticulous integration of single inner point subdomain. The meticulous integration is turned into difference equation in case transfer function, i.e. exponential function in meticulous integration of single inner point is replaced by Taylor expansion. This correspondence is studied, and each common difference scheme finds its corresponding meticulous integration of single point, and the unified expression is obtained in the general formula for meticulous integration of single point.

Keywords　two-dimensional parabolic equation, initial-value problem, numerical solution to partial differential equation, meticulous integration