第23卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.23 No.1
2002年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan.2002

文章编号 1000-5013(2002)01-001-04

解析算子中的不等式

黄 心 中

(华侨大学数学系,泉州 362011)

摘要 利用平面区域解析函数再生算子表示公式,估计有关解析函数的积分不等式.进而,判别极值 Teichmüller 映照.

关键词 解析算子,积分不等式,再生核,极值 Teichmüller 映照

中图分类号 O 174.55 文献标识码 A

设 $\mathbf{C}$ 是复平面点集,$D=\{z\,\big|\,|z|<1\}$ 是 $\mathbf{C}$ 上的单位圆盘,D 上的 Poincaré 尺度为

$$\rho(z)=\frac{1}{1-|z|^2},\ z\in D. \tag{1}$$

对任何 $z,w\in D$,令

$$K(z,w)=\frac{1}{(1-z\bar{w})^4}, \tag{2}$$

则 $\sup\limits_{w\in D}\rho^{-2}(w)|K(z,w)|<\infty$,称 $K(z,w)$ 为 D 上的再生核.这样,对任何 D 上的 L^1 可积函数 $f(z)$,下列积分算子

$$Tf(z)=\frac{3}{\pi}\iint_D\rho^{-2}(w)K(z,w)f(w)|\mathrm{d}w|^2 \tag{3}$$

仍是 L^1 可积函数.

令 $B=\{f(z)\,|\,f(z)$ 是 D 上的解析函数,满足

$$\|f(z)\|_1=\iint_D|f(z)||\mathrm{d}z|^2<\infty\},$$

$B_1\subset B$ 是 B 上的单位球.在 B 上引进一个常数 $C(B)$,它是满足下列不等式的常数 C 的下确界.即

$$\iint_D|f(z)||\mathrm{d}z|^2\le c\iint_D|\mathrm{Re}f(z)||\mathrm{d}z|^2, \tag{4}$$

对一切 $f(z)\in B$,$\mathrm{Im}f(0)=0$ 成立.

显然,有 $C(B)\ge 1$.关于对 $C(B)$ 的上界估计,文献[1]证明 $C(B)<\infty$,文献[2]证明 $C(B)\le 7$,而文献[3]用一维的积分表示,给出 $C(B)\le 20\sqrt{2}$ 的简洁证明.本文首先利用平面上解

收稿日期 2001-09-05 作者简介 黄心中(1957-),男,教授

基金项目 福建省自然科学基金资助项目

析函数再生算子表示法,给出一个 $C(B)\le 6$ 的证明. 应用 $C(B)\le 6$ 的结果,可给出一个到判极值 Teichmüller 映照的推论.

1 解析函数再生算子表示及主要结果

本节的积分表示可参见文[4]. 由式(3)可知,对任何 D 上 L^1 可积函数 $f(z)$, $Tf(z)$ 是存在的. 若 $\varphi(z)$ 是 D 上的解析函数,则

$$\varphi(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(re^{i\theta})\,d\theta,\qquad 0\le r<1.$$

从而

$$\varphi(0)=\frac{3}{\pi}\iint_D(1-r^2)^2\varphi(re^{i\theta})\,r\,dr\,d\theta=\frac{3}{\pi}\iint_D\rho^{-2}(\zeta)\varphi(\zeta)\,|d\zeta|^2. \tag{5}$$

取 $w(\zeta)=\dfrac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}$, $z\in D$, 为 D 到 D 上的共形映照,则

$$\Phi(\zeta)=\frac{w'(\zeta)^2\varphi(w(\zeta))}{w'(0)^2}=\varphi\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)/(1+\bar z\zeta)^4$$

是 D 上的解析函数. 由式(5)可得

$$\varphi(z)=\Phi(0)=\frac{3}{\pi}\iint_D\rho^{-2}(\zeta)\frac{\varphi\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar z\zeta}\right)}{(1+\bar z\zeta)^4}|d\zeta|^2=\frac{3}{\pi}\iint_D\frac{(1-|w|^2)^2}{(1-z\bar w)^4}\varphi(w)|dw|^2=$$

$$\frac{3}{\pi}\iint_D\rho^{-2}(w)K(z,w)\varphi(w)|dw|^2=T\varphi(z). \tag{6}$$

式(6)说明,对于任何 D 上解析函数 $\varphi(z)\in B$, 有 $T\varphi(z)=\varphi(z)$ 成立. 另一方面,再取 $w(z)=\dfrac{\zeta-z}{1-\bar z\zeta}$, 应用式(5)于 $\varphi(\zeta)w'(\zeta)^2$, 可得

$$\varphi(0)(1-|z|^2)=\frac{3}{\pi}\iint_D\rho^{-2}(\zeta)\varphi(\zeta)\frac{1-|z|^2}{(1-\bar z\zeta)^4}|d\zeta|^2,\qquad 0\le|z|<1.$$

从而

$$\overline{\varphi(0)}=\frac{3}{\pi}\iint_D\rho^{-2}(\zeta)K(z,\zeta)\overline{\varphi(\zeta)}|d\zeta|^2=T\overline{\varphi(z)}. \tag{7}$$

式(7)说明,对于任何 D 上解析函数 $\varphi(z)\in B$, 有 $T\overline{\varphi(z)}=\overline{\varphi(0)}$ 成立. 根据式(6),(7),可证明下列定理.

定理1 若 $C(B)$ 是满足下列不等式的常数 C 的下确界,即

$$\iint_D|f(z)||dz|^2\le C\iint_D|\mathrm{Re}f(z)||dz|^2.$$

它对一切 $f(z)\in B$, $\mathrm{Im}f(0)=0$ 成立,则 $C(B)\le 6$.

证明 对任何 $f(z)\in B$, 满足 $f(0)=0$. 根据式(6),(7),有

$$T\mathrm{Re}f(z)=\frac{1}{2}T[(f(z)+\overline{f(z)})]=\frac{1}{2}Tf(z)=\frac{1}{2}f(z).$$

从而

$$\iint_D|f(z)||dz|^2=2\iint_D|T\mathrm{Re}f(z)||dz|^2=$$

$$\frac{6}{\pi}\iint_D \left|\iint_D \rho^{-2}(w) K(z,w) \mathrm{Re} f(w) |\mathrm{d}z|^2\right| |\mathrm{d}w|^2 \le$$

$$\frac{6}{\pi}\iint_D |\mathrm{Re} f(w)| \left(\iint_D \rho^{-2}(w) |K(z,w)| |\mathrm{d}z|^2\right) |\mathrm{d}w|^2.$$

注意到 $\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{|\mathrm{d}z|^2}{|1-w\bar{z}|^4} = \frac{1}{(1-|w|^2)^2}$. 因此, 可得到

$$\iint_D |f(z)| |\mathrm{d}z|^2 \le 6\iint_D |\mathrm{Re} f(z)| |\mathrm{d}z|^2.$$

对一切 $f(z) \in B$, $f(0) = 0$ 成立. 根据 $C(B)$ 的定义, 得到 $C(B) \le 6$ 成立. 定理 1 证毕.

例　令 $f_n(z) = z^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 则有

$$\iint_D |f_n(z)| |\mathrm{d}z|^2 = \frac{\pi}{2}\iint_D |\mathrm{Re} f_n(z)| |\mathrm{d}z|^2.$$

事实上, 由下列两式的计算可知上式成立. 即

$$\iint_D |f_n(z)| |\mathrm{d}z|^2 = \iint_D |z|^n |\mathrm{d}z|^2 = \frac{2\pi}{n+2},$$

$$\iint_D |\mathrm{Re} f_n(z)| |\mathrm{d}z|^2 = \frac{1}{n+2}\int_0^{2\pi} |\cos(n\theta)| \mathrm{d}\theta = \frac{4}{n+2}.$$

以上例子说明, $C(B) \ge \frac{\pi}{2}$. 关于 $C(B)$ 的精确值, 至今还没有得到.

2　定理 1 的应用

设 $\mu(z)$ 是 D 上的有界 Lebesgue 可测函数, 具有 $\|\mu(z)\|_\infty = \operatorname{ess}\sup_{z \in D} |\mu(z)| < 1$. 由文 [5] 基本定理可知, 存在 D 到自身上的拟共形映照 $f(z)$, 满足 $f_{\bar{z}}(z) = \mu(z) f_z(z)$, 且 $f(w) = w$, $w = 1, \mathrm{i}, -1$. 若 $g(z)$ 是 D 到 D 上的拟共形映照, $K(z)$ 是 $g(z)$ 的复特征, 即 $g_{\bar{z}}(z) = K(z) g_z(z)$, 且 $g|_{|z|=1} = f|_{|z|=1}$, $\|\mu(z)\|_\infty \le \|K(z)\|_\infty$, 则称 $\mu(z)$ 是极值复特征. Hamilton, Reich 和 Strebel 首先给出判别一个极值复特征的充要条件[6,7], 即 $\mu(z)$ 是极值复特征的充要条件是下列条件之一成立. (1) 存在 $\varphi(z) \in B_1$, 使得 $\mu(z) = \|\mu(z)\|_\infty \overline{\varphi(z)}/|\varphi(z)|$ 对几乎处处 $z \in D$ 成立. (2) 存在 D 上内闭一致收敛于零的叙列 $\{\varphi_n(z)\}_1^\infty$, $\varphi_n(z) \in B_1$, 它满足 $\lim_{n\to\infty} \left|\iint_D \varphi_n(z) \mu(z) |\mathrm{d}z|^2\right| = \|\mu(z)\|_\infty$.

但是, 对于给定的极值复特征, 要判断是否满足条件(2) 是困难的. 当 $\mu(z)$ 的幅角或值域受到一定限制时, 文献 [5, 8, 9] 有较深入的研究. 本节将应用定理 1 给出一个到判极值 Teichmüller 映照的推论.

对于给定的 $0 \le \theta_1, \theta_2 \le 2\pi$, 记

$$S^k[\theta_1, \theta_2] = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} | 0 < r \le k, \theta_1 \le t \le \theta_2\},$$

$$S^k(\theta_1, \theta_2) = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} | 0 < r \le k, \theta_1 < t < \theta_2\}.$$

应用定理 1 及文献 [9] 中的定理 2, 可以得到如下推论.

推论 1　设 $K(z)$ 是 D 上的有界 Lebesgue 可测函数, 则 $\|K(z)\|_\infty = k < 1$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} +$

$\arcsin \frac{1}{11}$. 设存在常数 k', ρ, 满足 $k' < k$, $0< \rho< 1$, 使得对于几乎处处所有的 $z \in D\setminus\{|z| < \rho\}$ 有

$$K(z) \in S^{k}[-\theta, \theta] \cup S^{k'}(\theta, 2\pi-\theta).$$

因此, $K(z)$ 为极值复特征的充要条件是存在 $\varphi\in B_1$, 使得对几乎处处 $z\in D$ 有 $K(z) = k\frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$成立.

证明 从定理 1 可知, $C(B)\leq 6$, 故

$$\arcsin[(\frac{1}{2C(B)-1})] \geq \arcsin \frac{1}{11}.$$

从文献 [9] 的定理 2 便可推出推论 1 的结论成立. 推论 1 证毕.

参 考 文 献

1 Hardy G H, Littlewood J E. Some properties of conjugate functions [J]. J. Reine Angew. Math., 1931, 167: 405～423

2 Bergman A S. Spaces and their operators[M]. New York: Jhon Wiley & Sons Inc., 1990. 1～50

3 Ortel M, Smith W. The argument of an extremal dilatation[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, 104 (2): 498～502

4 Gardiner F P. Teichmüller theroy and quadratic differentials[M]. New York: Wiley, 1987. 80～84

5 Ahlfors L V. Lectures on quasiconformal mappings[M]. New York: Van Nostrand, 1966. 85～115

6 Hamilton R S. Extremal quasiconformal mappings with given boundary values[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 138: 399～406

7 Reich E, Strebel K. Extremal quasiconformal mappings with given boundary values: Contributions to analysis, a collection of papers dedicated to lipman bers[M]. New York: Academic Press, 1974. 375～391

8 Huang Xinzhong. The image domain of an extremal dilatation[J]. Advances in Math. (China), 1993, 22 (5): 435～446

9 Huang Xinzhong, Taniguchi M. On the contraction of the Teichmüller metrics[J]. J. Math. Kyoto Univ., 1995, 35(1): 133～142

Inequality in Analytic Operator

Huang Xinzhong

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract By using regenerative operator of analytic function in a plane domain to represent the formula, the author estimates the integral inequality of relevant analytic function; and moreover, discriminates the extremal Teichmüller mapping.

Keywords analytic operator, integral inequality, regenerative kernel, extremal Teichmüller mapping