

# 具有滞环的非线性非自治电路唯一稳态

冯 平

(解放军后勤工程学院自动化工程系, 重庆 400016)

**摘要** 利用向量比较原理, 得到确定具有滞环的非线性非自治电路的唯一稳态条件. 结果表明, 具有滞环的非线性非自治电路的唯一稳态, 可以用一个常数矩阵的 HURWITZ 条件来决定, 其结果扩展已有的经典结果.

**关键词** 非线性电路, 唯一稳态, 滞环多值系统

**中图分类号** TM 132

**文献标识码** A

非线性非自治电路的唯一稳态的研究, 是十分重要而又困难的问题. 经典理论认为, 如果电路中元件的成份关系是单值的, 且严格递增(即斜率为正), 对于不同的电路, 可以得到不同的保证电路具有唯一稳态的条件. 文献[1], 文[2]改进了部分工作, 但其对电路中元件的成分关系的要求, 仍需是单值和严格递增的. 对于电路元件为多值函数的情况(如含滞环), 目前还没有相应的结果. 事实上, 在电路及其它领域有大量的滞环现象<sup>[3,4]</sup>. 例如, 在电路的铁磁元件中, 电流与磁通的关系、材料力学中压力与应变的关系等等, 均是典型的滞环多值关系. 因此, 建立适用于含有多值函数元件电路的唯一稳态的判据, 在理论与实用方面都有重要的意义. 本文利用向量比较原理, 在电路元件成分关系为多值函数(滞环)的条件下, 得到了电路的唯一稳态条件. 因此, 本文的结论比经典结果, 有更广的适用范围.

## 1 研究模型

考虑非线性电路  $N$ , 其中的元件满足如下4点关系. (1)  $N_L$  滞环电感  $i-\varphi$  曲线, 如图1所示. 它满足

$$d\varphi/dt = g[i - f(\varphi)], \quad (1)$$

$g(\cdot), f(\cdot)$  满足文[5]的条件, 即为一一对应的单调递增函数.

相应的电路模型<sup>[6]</sup>, 如图2所示. 图中,  $R_L$  是非线性电阻, 满足

$$0 < K_{R_{L_{\min}}} < (v_{R_{L_1}} - v_{R_{L_2}}) / (i_{R_{L_1}} - i_{R_{L_2}}) = K_{R_L} < K_{R_{L_{\max}}}.$$

$L$  是非线性电感, 满足

$$0 < K_{L_{\min}} < (i_{L_1} - i_{L_2}) / (\varphi_1 - \varphi_2) = K_L < K_{L_{\max}}.$$

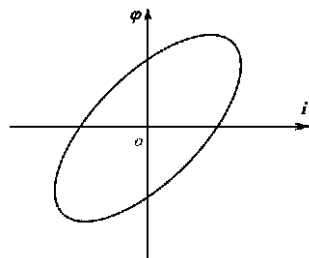


图1 滞回电感曲线

(2)  $N_C$  滞环电容  $v-q$  曲线, 如图3所示. 有

$$dq/dt = g[v - f(q)], \quad (2)$$

$g(\cdot), f(\cdot)$  满足文 [6] 的条件, 即为一一对应的单调递增函数. 相应的电路<sup>[6]</sup>, 如图4所示. 图中,  $R_C$  是非线性电阻, 满足

$$0 < K_{R_{C_{\min}}} \quad (i_{R_{C_1}} - i_{R_{C_2}}) / (v_{R_{C_1}} - v_{R_{C_2}}) = K_{R_C} \quad K_{R_{C_{\max}}},$$

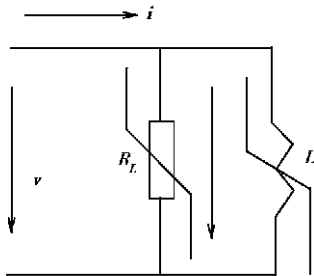


图2 滞回电感等效电路图

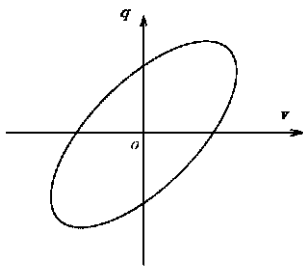


图3 滞回电容曲线

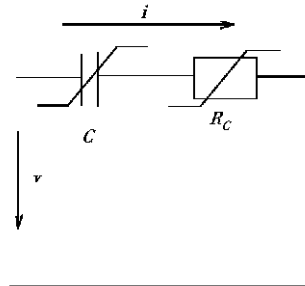


图4 滞回电容等效电路图

$C$  是非线性电容, 满足

$$0 < K_{C_{\min}} \quad (v_{C_1} - v_{C_2}) / (q_{C_1} - q_{C_2}) = K_C \quad K_{C_{\max}}.$$

(3)  $N_R$  线性电阻. (4)  $N_U$  电压源 ( $U_S$ ).  $K_C, K_{R_C}, K_L$  和  $K_{R_L}$  均为常数. 假定  $N$  为完备电路, 对电路列写方程有

$$\sum v_l + \sum v_R + \sum v_C = \sum u_k; \quad \sum i_l + \sum i_R + \sum i_C = 0. \quad (3)$$

这里, 电感电压  $V_l = [V_{l1}, V_{l2}, \dots, V_{lN_L}, 0, \dots, 0]^T$ , 电感电流  $i_l = [i_{l1}, i_{l2}, \dots, i_{lN_L}, 0, \dots, 0]^T$ ; 电容电压  $V_C = [V_{C1}, V_{C2}, \dots, V_{CN_L}, 0, \dots, 0]^T$ , 电容电流  $i_C = [i_{C1}, i_{C2}, \dots, i_{CN_L}, 0, \dots, 0]^T$ ; 电阻电压  $V_R = [V_{R1}, V_{R2}, \dots, V_{RN_L}, 0, \dots, 0]^T$ , 电阻电流  $i_R = [i_{R1}, i_{R2}, \dots, i_{RN_L}, 0, \dots, 0]^T$ . 如果  $X_1 = [i_{l1}, v_{C1}, v_{l1}, i_{C1}, V_{R1}, i_{R1}]$  和  $X_2 = [i_{l2}, v_{C2}, v_{l2}, i_{C2}, V_{R2}, i_{R2}]$  为电路的任两个有界解, 并记

$$\Delta v_{li} = v_{li} - v_{l2} \quad i = 1, 2, \dots, N_L,$$

$$\Delta i_{Cj} = i_{Cj} - i_{C2} \quad j = 1, 2, \dots, N_C,$$

则有

$$\sum \Delta v_l + \sum \Delta v_R + \sum \Delta v_C = 0, \quad \sum \Delta i_l + \sum \Delta i_R + \sum \Delta i_C = 0. \quad (4)$$

考虑到  $d\Delta\varphi/dt = \Delta v$ ,  $d\Delta q/dt = \Delta i_C$ , 及各元件的关系. 其中,  $q$  为电容电荷矢量,  $\varphi$  为电感磁链矢量. 因此有

$$\begin{bmatrix} \Delta v_l \\ \Delta i_C \end{bmatrix} = H(K_{R_L}, K_{R_C}) \begin{bmatrix} \Delta i_l \\ \Delta v_C \end{bmatrix}, \quad (5)$$

又写为

$$dX/dt = A(t)X. \quad (6)$$

这里,  $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ ,  $X = \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta q \end{bmatrix}$ .

显然, 如果式(6)的零解 ( $v=0$ ) 是全局渐进稳定的, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X\| = 0$ , 是电路  $N$  的稳态唯一.

下面, 推导式(6)的零解全局渐进稳定的条件.

## 2 唯一稳态定理

首先,给出如下引理

引理1 连续向量  $F(X, t)$  是拟单调增的. 因此假若  $y_i = z_i, y_j < z_j (i \neq j)$  和  $f_i(Y, t) \leq f_i(z, t)$  成立.

引理2<sup>[6]</sup> 如向量  $R(t)$  满足微分不等式, 即

$$dR(t)/dt \leq F(R, t), \quad R(t_0) \leq X_0.$$

向量  $P(t)$  是微分方程  $dX/dt = F(X, t), X(t_0) = X_0$  的最大解, 并且  $F(X, t)$  是拟单调增的, 则有  $R(t) \leq P(t)$ . 于是, 对式(6)有如下的定理.

定理1 对式(6)如果有两个常数阵  $P(p_{ij})_{n \times n}$  和  $Q(q_{ij})_{n \times n}$ , 其满足  $p_{ij} = a_{ij}(t) - q_{ij}$ . 以如下方式构造矩阵  $M, M = (m_{ij})_{n \times n}, m_{ij} = q_{ij}, m_{ij} = \max\{|p_{ij}|, |q_{ij}|\}$ , 则电路  $M$  有唯一稳态的充分条件. 也即  $M$  为 Hurwitz 阵.

证 考虑如下的方程

$$dZ(t)/dt = MZ(t), \quad (7)$$

我们定义记号  $DA(t) = \text{diag}[a^{11}(t), \dots, a^{nn}(t)], D(t) = \text{diag}[m^{11}(t), \dots, m^{nn}(t)], A(t) = DZ(t) + [Z(t) - DA(t)]$ .

矩阵为相应矩阵取绝对值后, 所得的矩阵. 对于式(6), 有

$$X(t) = e^{\int_{t_0}^t D_A(\tau) d\tau} X_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} D_A(\tau) d\tau} [A(\tau) - D_A(\tau)] X(\tau) d\tau$$

由定义记号, 有  $|A(t) - D(t)| \leq M - D(t), D_A(t) = D(t)$ . 于是有

$$\begin{aligned} (|X(t)|) &= e^{\int_{t_0}^t D_A(\tau) d\tau} (|X_0|) + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} D_A(\tau) d\tau} (|A(\tau) - D(\tau)|) (|X(\tau)|) d\tau \\ &= e^{\int_{t_0}^t D_A(\tau) d\tau} (|X_0|) + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} D_A(\tau) d\tau} (|M - D(\tau)|) (|X(\tau)|) d\tau = Y(t). \end{aligned}$$

显然,  $Y(t)$  对  $t$  连续. 于是, 有  $dY(t)/dt = D(t)Y(t) + [M - D(t)](X(t)) = D(t)Y(t) + [M - D(t)]Y(t) = MY(t)$ . 由引理2, 有  $Y(t) \leq Z(t)$  和  $(|X(t)|) \leq Y(t) \leq Z(t)$ .

如果  $M$  是 Hurwitz 阵, 则式(7)的零解是全局渐进稳定的. 即式(6)的零解也是全局渐进稳定的, 也说明电路  $N$  的稳态是唯一的. 证毕.

## 3 数字模拟

图5所示电路中,  $e(t) = E \sin \omega t$ ,  $R_C$  和  $C$  的组合表示一滞环电容,  $R_L$  和  $L$  的组合表示一滞环电感, 各元件满足式(2)中的条件. 则其增量状态方程为

$$\begin{bmatrix} d\Delta\varphi/dt \\ d\Delta q/dt \end{bmatrix} = \frac{K_{RC}}{1 + K_{RC}K_{RL}} \begin{bmatrix} -K_{RL}K_L/K_{RL} & -K_{RL}K_C \\ K_{RL}K_L & -K_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta q \end{bmatrix}. \quad (8)$$

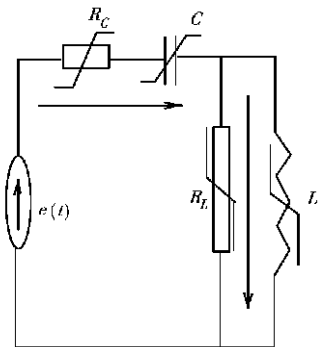


图5 例图

$$\left. \begin{aligned} & K_{RC} > 0, \quad K_{RL} > 0, \\ & -2K_{RL}K_L/K_{RC} - K_{RL}K_C + K_{RL}K_L < 0, \\ & -2K_C + \left| -K_{RL}K_C + K_{RL}K_L \right| < 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

取  $i_L = 5q + \arctan q$ ,  $V_{RL} = 0.02i_{RL} + \arctan 0.03i_{RL}$ ,  $V_C = q + \arctan q$ ,  $i_{RC} = 0.5V_{RC} + \arctan 0.5V_{RC}$ . 则当  $5 \leq K_L \leq 6$ ,  $0.02 \leq K_{RL} \leq 0.05$ ,  $1 \leq K_C \leq 4$  和  $0.5 \leq K_{RC} \leq 1$  时, 电路有唯一稳态. 用计算机模拟, 与上述结论相符.

## 4 结束语

本文利用向量比较原理, 得到了确定具有滞环的非线性非自治电路唯一稳态的条件. 同时, 给出了一个算例, 结果与理论分析吻合, 并扩展了已有的经典结果.

## 参 考 文 献

- 1 Hasler M, Verburgh P. Uniqueness of the steady state for small source amplitudes in nonlinear nonautonomous circuits[J]. Int. Journal of Circuit Theory and Application, 1985, 13: 3 ~ 17
- 2 Hasler M, Verburgh P. On the uniqueness of the steady state for nonlinear circuits with time-dependent sources[J]. IEEE Trans. on CAS, 1984, 31: 702 ~ 713
- 3 Chua L O, Stromsmoe K A. Lumped circuit models for nonlinear inductors exhibiting hysteresis loops[J]. IEEE Trans. on CT, 1970, (4): 564 ~ 574
- 4 Mack J W, Nistri P, Zecca P. Mathematical model for hysteresis[J]. Siam Review, 1993, 35(1): 94 ~ 123
- 5 尤秉礼. 常微分方程补充教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981. 34 ~ 50

# A Study on the Uniquely Steady State of Nonlinear and Nonautonomous Circuits with Hysteresis Loop

Feng Ping

(Dept. of Automation Eng., College of PLA Logistic Eng., 400016, Chongqing)

**Abstract** With regard to the nonlinear and nonautonomous circuits with hysteresis loop, the author obtains the condition determining their uniquely steady state. As shown by the author's results, the uniquely steady state of nonlinear and nonautonomous circuits with hysteresis loop can be determined by applying HURWITZ condition of one constant matrix. The present work has extended the classical results now available.

**Keywords** nonlinear circuit, uniquely steady state, hysteresis multivalued system