第22卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.22 No.4
2001年10月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct.2001

文章编号 1000-5013(2001)04-0418-05

各向异性磁介质中三维同轴电缆的自感

许碧惠 王建成 苏武浔 明 杨

(华侨大学信息科学与工程学院,泉州 362011)

摘要 在高频信号的传输过程中,传输线的分布电感和分布电容不容忽视. 以磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律,以及由此定律而求出的在各向异性磁介质中载流直导线磁场,作为论述该研究的基础. 从而由公式 $\epsilon = L\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|$,求出在各向异性磁介质中有一定横截面的同轴电缆的分布电感.

关键词 自感,各向异性,磁介质,同轴电缆

中图分类号 TM 152.3 文献标识码 A

1 各向异性磁介质的磁场

1.1 各向异性磁介质的毕奥-萨伐尔定律

当各向异性磁介质的3个主轴与笛卡儿坐标 X, Y, Z 轴分别平行时,各向异性磁介质的毕奥-萨伐尔定律为[1,2]

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\dot{\mu}}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{\left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}}+\frac{R_2^2}{\mu_{22}}+\frac{R_3^2}{\mu_{33}}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}V' . \tag{1}$$

在式(1)中,并矢 $\dot{\mu} = \overline{\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}}}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}}}}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \overline{\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}}}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$. μ_{11},以及 μ_{22} 和 μ_{33},均为磁导率张量矩阵的元素;而 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$,则分别是3个直角坐标轴的单位矢量. $\boldsymbol{R}$ 为源点 $\boldsymbol{x}'$ 到场点 $\boldsymbol{x}$ 的矢径,即

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = R_1\boldsymbol{e}_1 + R_2\boldsymbol{e}_2 + R_3\boldsymbol{e}_3 .$$

若 I 代表电流,则当电流作线分布时,式(1)写成

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\dot{\mu}}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{\left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}}+\frac{R_2^2}{\mu_{22}}+\frac{R_3^2}{\mu_{33}}\right)^{\frac{3}{2}}} . \tag{2}$$

式(1)和式(2)称为各向异性磁介质的毕奥-萨伐尔定律的笛卡儿坐标形式.

1.2 各向异性磁介质中载流直导线的磁场

如图1所示,有位于 Z 轴,载有电流 I,长为 L 的直导线. 它在 Y 轴上距坐标原点为 a 的 p 点处,产生的磁感应为强度为[2]

收稿日期 2001-04-10 作者简介 许碧惠(1971-),女,助教

基金项目 福建省自然科学基金资助项目

$$\boldsymbol{B}_y(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi a} I(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\boldsymbol{e}_1, \quad (3)$$

式中 $\theta_1 = \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{33}}}\tan\beta_1\right)$, $\theta_2 = \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{33}}}\cdot\tan\beta_2\right)$.

若载流直导线不是位于 Z 轴上, 而是分别位于 X 轴或 Y 轴上,则距原点为 a, 位于 Z 轴或 X 轴上的 p 点产生的磁感应强度分别为

$$\boldsymbol{B}_z(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi a} I(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\boldsymbol{e}_2, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{B}_x(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}}{4\pi a} I(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\boldsymbol{e}_3. \quad (5)$$

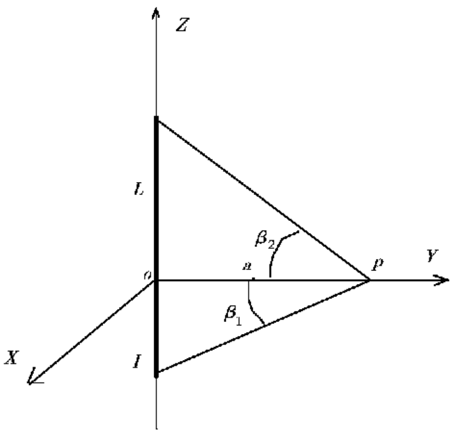


图 1　载流直导线的磁场

在式(4)中, $\theta_1 = \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}}\tan\beta_1\right)$, $\theta_2 = \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}}\tan\beta_2\right)$. 而式(5)的 $\theta_1 = \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}}\cdot\tan\beta_1\right)$, $\theta_2 = \arctan\left(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}}\tan\beta_2\right)$. 若载流直导线为无限长时, 式(3)～(5)分别化为

$$\boldsymbol{B}_y(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi a} I\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{B}_z(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2\pi a} I\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{B}_x(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}}{2\pi a} I\boldsymbol{e}_3. \quad (6)$$

当介质为线性各向同性时, 有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$. 所以式(3)～(5)为同一式. 即 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu I}{4\pi a}\cdot(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$. 式(6)合并为 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu I}{2\pi a}$.

2　各向异性磁介质中同轴电缆的自感

设同轴电缆由半径为 R_1 的圆柱导体和半径为 $R_2(R_2 > R_1)$ 的薄圆筒导体组成, 沿 Z 轴放置, 如图2所示. 内外导体之间构成了闭合回路. 在圆柱导体中取一半径为 y_1, 宽度为 Δy_i 的薄圆筒 $T_i(y_i < R_1)$, 如图3所示. 它和外圆筒 R_2 之间构成了闭合回路. 设同轴电缆为无限长, 通有电缆 $I(t)$. 当 $y < R_1$ 时, 在 Y 轴上距坐标原点为 y 的 p 点处产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi y}\cdot\frac{\pi y^2}{\pi R_1^2} I\boldsymbol{e}_1 = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi R_1^2} I y\boldsymbol{e}_1.$$

当 $R_1 < y < R_2$ 时, 在 Y 轴上距坐标原点为 y 的 p 点处产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi y} I\boldsymbol{e}_1.$$

由此可得, 在薄圆筒 T_i 和外圆筒 R_2 之间单位长度上的磁通量为

$$\Phi_i = \int_{y_i}^{R_1} B_1\mathrm{d}y + \int_{R_1}^{R_2} B_2\mathrm{d}y = \left(\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi} + \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)I - \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi R_1^2} y_i^2 I. \quad (11)$$

所以, 由薄圆筒 T_i 和外圆筒 R_2 所构成的闭合回路, 其单位长度上自感电动势的大小为

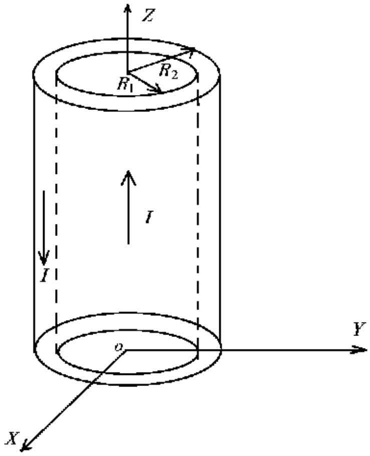


图2　同轴电缆

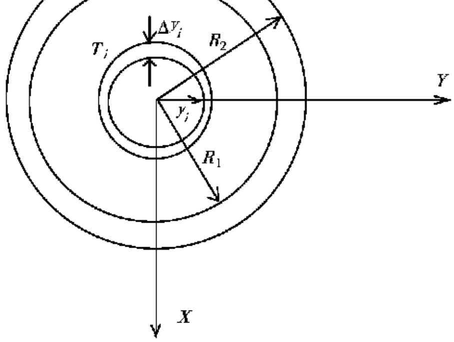


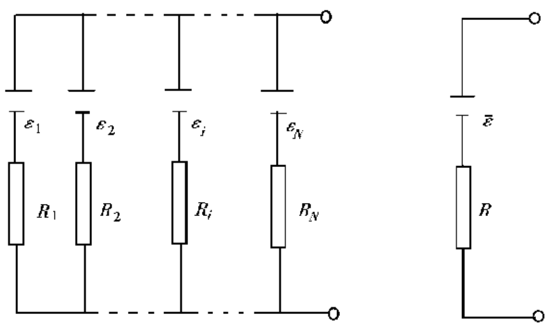
图3　同轴电缆的俯视图

$$\epsilon_i = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}t}\right| = \left(\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{4\pi} + \frac{\mu_{11}\mu_{22}}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right| - \frac{\mu_{11}\mu_{22}}{4\pi R_1^2}\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right| y_i^2.$$

令 $\epsilon_0 = \left(\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{4\pi} + \frac{\mu_{11}\mu_{22}}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|$, $A = \left(\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{4\pi R_1^2}\right)\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|$. 则有

$$\epsilon_i = \epsilon_0 - A y_1^2. \qquad (7)$$

由此可见, 薄圆筒 T_i 和外圆筒 R_2 构成的团合回路中的自感电动势和薄圆筒 T_i 的半径 y_i 有关. 整个半径为 R_1 的圆柱导体, 可以看作由无数个不同半径的薄圆筒 T_i 所组成. 它们相互并联, 和外圆筒 R_2 构成了无数个闭合回路. 每个闭合回路上的自感电动势均满足式(9), 且各有电阻 $R_1, R_2, \cdots, R_N$, 其等效电路如图4所示.



(a) 简化前　　　(b) 简化后

图 4　简化前后的等效电路图

根据戴维南定理可得, 它们的等效自感电动热 $\bar{\epsilon}$ 为

$$\bar{\epsilon} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\epsilon_i}{R_i} \Big/ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i} \qquad N \to \infty, \qquad (8)$$

其中 $\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} = 1/\rho\frac{1}{\pi R_1^2} = \frac{\pi R_1^2}{\rho}$, ρ 为圆柱导体的电阻率, R 是圆柱导体单位长度上的电阻. 而 $\sum_{i=1}^{N}\frac{\epsilon_i}{R_i} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\epsilon_i}{\rho\frac{1}{2\pi y_i \Delta y_i}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{2\pi}{\rho}\epsilon_i y_i \Delta y_i$. 因而, 式(8) 为

$$\bar{\epsilon} = \frac{\lim\sum_{i=1}^{N}\frac{\epsilon_i}{R_i}}{\lim\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i}} = \frac{\int_0^{R_1}\frac{2\pi}{\rho}\epsilon y\,\mathrm{d}y}{\frac{\pi R_1^2}{\rho}} = \frac{2}{R_1^2}\int_0^{R_1}\epsilon y\,\mathrm{d}y.$$

再将式(7)代入上式, 得 $\bar{\epsilon}=\frac{2}{R_1^2}\int_0^{R_1}(\epsilon_0-Ay^2)y\,\mathrm{d}y=\epsilon_0-\frac{1}{2}AR_1^2$. 最后将式 ϵ_0, A 代入上式, 得

$$\bar{\epsilon}=\left(\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{8\pi}+\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|.$$

由 $\epsilon=L\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|$, 得沿 Y 轴方向的自感为

$$L=\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{8\pi}+\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right), \tag{9}$$

其结果与文[3]有所差别. 这是文献[3]忽略了圆柱导体截面影响所致.

当介质为线性各向同性时, 有 $\mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{33}=\mu$. 可得 $L=\frac{\mu}{8\pi}+\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$, 与公认结果一致[4]. 显然, 若同轴电缆不是位于 Z 轴上, 而是分别位于 X 轴或 Y 轴上, 则式(9)中的 $\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}$ 应分别由 $\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}$ 和 $\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}$ 替代. 这表明了磁介质为各向异性的影响.

参　考　文　献

1　陈　年, 王建成. 各向异性磁矢势 **A** 的微分方程及其解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(1): 90～97

2　王建成, 陈　年. 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(2): 125～132

3　王建成, 明　杨, 李　强等. 各向异性磁介质中传输线的自感[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2001, 22(1): 90～93

4　丁斌刚. 再谈“三维导体”的自感系数[J]. 大学物理, 2000, 19(11): 5～6

Self-Inductance of Three-Dimensional Coaxial-Cable in Anisotropically Magnetic Medium

Xu Bihui　Wang Jiancheng　Su Wuxun　Ming Yang

(College of Info. Sci. & Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　During the transmission of high-frequency signal, the distributed inductance and the distributed capacitance of transmission line should not be over-looked. The present work is based on Biot-Savart law of magnetic anisotropy and also on magnetic field of current-carrying straight conductor in anisotropically magnetic medium solved from this law. From formula $\epsilon=L\left|\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|$, the authors solve the distributed inductance of coaxial-cable with definite cross section in anisotropically magnetic medium.

Keywords　self-inductance, anisotropy, magnetic medium, coaxial cable