第22卷　第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.22　No.4
2001年10月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct.2001

文章编号　1000-5013(2001)04-0351-05

Ostrowski-Reich 定理在 GETOR 方法中的应用

曾　文　平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　定义广义 ETOR(记为GETOR)方法. 同时对GETOR 方法建立了 Ostrowski-Reich 型定理, 扩充了已有的结果.

关键词　线代数方程组, 广义 ETOR 迭代法, 收敛性
中图分类号　O 175.9　　文献标识码　A

设有线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 非奇异矩阵, $\boldsymbol{b}$ 是 n 维向量. 若

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} - \boldsymbol{F} - \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{F}', \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A})$, $-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F})$ 及 $-(\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{F}')$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的严格下或上三角矩阵. 对更一般的 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}$ 及 $\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{F}'$, 文[1]给出了SOR 迭代的著名的 Ostrowski-Reich 定理(下称 O-R 定理). 文[2]给出了 AOR 迭代的 O-R 型定理. 文[3～6]提出了推广的 TOR(ETOR) 及广义 ETOR (GETOR) 迭代, 并讨论其收敛性. 本文目的是将 O-R 定理推广到 GETOR 方法, 且以 ETOR, TOR, AOR 及 SOR 方法的 O-R 型定理为其特例. 因此, 它扩充了已有的结果.

1　广义 ETOR(GETOR) 方法

设方程组(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的, 且有式(2)型分裂, 其中 $\boldsymbol{D}$ 是非奇异矩阵($\boldsymbol{D}$ 不必是对角(块)矩阵), $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 是任意矩阵(他们不必是三角矩阵). 因此, 定义广义的 ETOR (GETOR) 迭代法为[6]

$$\boldsymbol{X}^{(m+1)} = \boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau}\boldsymbol{X}^{(m)} + \boldsymbol{K}. \tag{3}$$

在式(3)中, GETOR 迭代矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau} &\equiv (\boldsymbol{D} - \alpha\boldsymbol{E} - \beta\boldsymbol{F})^{-1}\{(1-\tau)\boldsymbol{D} + \\ &\quad (\tau-\alpha)\boldsymbol{E} + (\tau-\beta)\boldsymbol{F} + \tau\boldsymbol{E}' + \tau\boldsymbol{F}'\} = \\ &\quad (\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v})^{-1}\{(1-\tau)\boldsymbol{I} + (\tau-\alpha)\boldsymbol{u} + (\tau-\beta)\boldsymbol{v} + \tau\boldsymbol{u}' + \tau\boldsymbol{v}'\},\end{aligned} \tag{4}$$

收稿日期　2001-05-06　　作者简介　曾文平(1940-), 男, 教授

$$K \equiv (D - \alpha E - \beta F)^{-1}\tau b = \tau(I - \alpha u - \beta v)^{-1}D)^{-1}b, \tag{5}$$

其中

$$u = D^{-1}E,\ v = D^{-1}F,\ u' = D^{-1}E',\ v' = D^{-1}F'. \tag{6}$$

若在式(4),式(5)中,令 $\alpha = \frac{\alpha'}{2}$, $\beta = \frac{\beta'}{2}$, $\tau = \frac{\alpha'+\beta'}{2}$,则它退化为广义的TOR方法. 于是,它的迭代矩阵为

$$L_{\alpha',\beta',F} \equiv (2D - \alpha' E - \beta' F)^{-1}\{(2 - \alpha' - \beta')D + (\alpha'+\beta')(E'+F') + \alpha' F + \beta' E\}. \tag{7}$$

特别地,若取 $\alpha = \beta = 0$, $\tau = 1$ 则为广义Jacobi迭代,其迭代矩阵为

$$B = D^{-1}(E + F + E' + F'). \tag{8}$$

若取 $\alpha = \beta = \tau = 1$,则为广义的Gauss-Seidel迭代,其迭代矩阵为

$$G = (D - E - F)^{-1}(E' + F'). \tag{9}$$

若取 $\alpha = \beta = \tau = \omega$,则为广义的SOR迭代,其迭代矩阵为

$$L_\omega = (I - \omega L)^{-1}\{(1 - \omega)I + \omega R\}, \tag{10}$$

其中 $L = u + v$, $R = u' + v'$. 若取 $\alpha = \beta = \tau = \omega$, $\tau = r$ 则为AOR迭代,其迭代矩阵为

$$L_{\omega,r} = (I - rL)^{-1}\{(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega R\}. \tag{11}$$

2 Ostrowski-Reich型定理

定理1 设Hermitian阵 A 具有式(2)型分裂,且 D 是Hermitian正定阵, $E^H = E'$, $F^H = F'$. 广义的Jacobi矩阵 $B = D^{-1}[(\tau - \alpha)(E + E^H) + (\tau - \beta)(F + F^H)]$,有实的特征值 μ_i ($i = 1, 2, \cdots, n$). 令 $\underline{\mu} = \min\mu_i$,则当 $0 < \tau < 2 + \underline{\mu}$ 时,GATOR方法收敛当且仅当 A 是正定矩阵.

证明 因为

$$M = \frac{1}{\tau}(D - \alpha E - \beta F), \tag{12}$$

$$N = \frac{1}{\tau}[(1 - \tau)D + (\tau - \alpha)E + (\tau - \beta)F + \tau E^H + \tau F^H]. \tag{13}$$

所以, $A = M - N$, $L_{\alpha,\beta,\tau} = M^{-1}N$,且

$$M^H + N = \frac{1}{\tau}[(2 - \tau)D + (\tau - \alpha)(E + E^H) + (\tau - \beta)(F + F^H)] \tag{14}$$

是Hermitian阵. 因此

$$W = D^{-\frac{1}{2}}(M^H + N)D^{-\frac{1}{2}} = (2 - \tau)I + T \tag{15}$$

也是Hermitian阵. 设 λ_i 和 σ_i 分别是 W 和 T 的特征值,于是

$$\lambda_i = \frac{2 - \tau + \sigma_i}{\tau}. \tag{16a}$$

因 $T = D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}}$,故 $\sigma_i = \mu_i$. 因此,有

$$\lambda_i = \frac{2 - \tau + \mu_i}{\tau} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{16b}$$

从式(17)推出, W 与 $M^H + N$ 是正定矩阵当且仅当 $0 < 2 + \underline{\mu}$. 从文[2]推出本定理的结果.

推论　设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}$ 正定对称, $\mu_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{D}^{-1}\{(\tau-\alpha)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}})+(\tau-\beta)(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}})\}$ 的特征值, $\underline{\mu}=\min\limits_{1\le i\le n}\mu_i$. 因此, 有以下结论. (1) 若 $\underline{\mu}\ge 0$, 则当 $0<\tau<2$ 时, GETOR 方法收敛. (2) 若 $\underline{\mu}<0$ 时, 则当 $0<\tau<2+\underline{\mu}$ 时, GETOR 法收敛.

设矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}$ 的特征值 $\mu_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数, 且记

$$\underline{\mu}=\min_{1\le i\le n}\mu_i,\qquad \bar{\mu}=\min_{1\le i\le n}\mu_i.$$

定义集合 $J_1(\tau,\alpha,\beta)$, $(\tau,\alpha,\beta)\in J_1(\tau,\alpha,\beta)$, 满足 $0<\tau<2$. 同时, 条件(17)成立. 即

$$\text{当 }\underline{\mu}<\bar{\mu}\le 0\text{ 时},\qquad \frac{\alpha+\beta}{2}>\tau+\frac{2-\tau}{\underline{\mu}},\tag{17a}$$

$$\text{当 }\bar{\mu}>\underline{\mu}\ge 0\text{ 时},\qquad \frac{\alpha+\beta}{2}<\tau+\frac{2-\tau}{\bar{\mu}},\tag{17b}$$

$$\text{当 }\underline{\mu}=\bar{\mu}=0\text{ 时},\ \alpha\text{ 和 }\beta\text{ 为任意实数},\tag{17c}$$

$$\text{当 }\underline{\mu}<0<\bar{\mu}\text{ 时},\ \tau+\frac{2-\tau}{\underline{\mu}}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\tau+\frac{2-\tau}{\bar{\mu}},\tag{17d}$$

定理2　设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 是 Hermitian 正定阵, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}$ 是广义 Jacobi 迭代阵, 其特征值是 $\mu_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, $\underline{\mu}=\min\limits_{1\le i\le n}\mu_i$, $\bar{\mu}=\max\limits_{1\le i\le n}\mu_i$, 且 $\boldsymbol{D}-\alpha\boldsymbol{E}-\beta\boldsymbol{F}$ 非奇异. 那么, 当

$$0<2\tau\le\alpha+\beta<4\ \text{或}\ 0<2\tau<\alpha+\beta\le 4,\tag{A}$$

或

$$(\tau,\alpha,\beta)\in J_1(\tau,\alpha,\beta)\tag{B}$$

时, $\rho(\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau})<1$, 即 GETOR 迭代收敛.

证明　取 $\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{S}_2$, 定义

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}_1),\ \boldsymbol{F}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}_2),\tag{18}$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F})-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F})^{\mathrm{H}}$.

假定 λ 是 $\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau}$ 的任意特征值, $\boldsymbol{x}\ne 0$ 是其相应的特征向量. 于是

$$\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}.\tag{19}$$

也即

$$\begin{aligned}&\{(4-\alpha-\beta)\boldsymbol{D}+(\alpha+\beta-4\tau)\boldsymbol{A}-(\alpha\boldsymbol{S}_1+\beta\boldsymbol{S}_2)\}\boldsymbol{x}=\\&\{(4-\alpha-\beta)\boldsymbol{D}+(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}-(\alpha\boldsymbol{S}_1+\beta\boldsymbol{S}_2)\}\boldsymbol{x}.\end{aligned}\tag{20}$$

若记

$$\begin{aligned}&\langle\boldsymbol{D}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=f>0,\qquad \langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=g>0,\\&\langle\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=ih_1,\qquad \langle\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=ih_2,\end{aligned}$$

其中记号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示向量内积. 将式(20)与 $\boldsymbol{x}$ 内积便得

$$\begin{aligned}|\lambda|^2&=\left|\frac{(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta-4\tau)g-(\alpha h_1+\beta h_2)i}{(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta)g-(\alpha h_1+\beta h_2)i}\right|=\\&1-8\tau g\frac{(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta-2\tau)g}{d},\end{aligned}\tag{21}$$

其中 $d=[(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta)g]^2+(\alpha h_1+\beta h_2)^2$. 于是, 由式(21), 则下述(i), (ii)立即可见.

(i) 当 $0<2\tau\le\alpha+\beta<4$ 或 $0<2\tau<\alpha+\beta\le 4$ 时, 对所有 λ 均有 $|\lambda|<1$. 也即, 迭代矩阵 $\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,\tau}$ 的

谱半径 $\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$.

(ii) 当 $W=2(2-\tau)D+(2\tau-(\alpha+\beta))DB$ 为正定阵时, $\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$. 因 D 是 Hermitian 正定阵, 故 W 是正定阵当且仅当

$$G=D^{-\frac{1}{2}}WD^{\frac{1}{2}}=2(2-\tau)I+(2\tau-(\alpha+\beta))D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}} \tag{22}$$

为一正定阵. 而 E 为正定阵, 当且仅当

$$2(2-\tau)+(2\tau-(\alpha+\beta))\mu_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{23}$$

不难验证, 当 $(\tau,\alpha,\beta)\in J_1(\tau,\alpha,\beta)$ 时, 显然式(23)成立. 从而, $\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$. 证毕.

注1 当 $0\leq\alpha+\beta\leq4$ 时, $D-\alpha E-\beta F$ 是非奇异的. 因此, 这时定理2中的"$D-\alpha E-\beta F$, 它是非奇异的"这一条件, 可以去掉. 事实上, 因对 $\forall x\in C^n$(n 维复域)有 $\mathrm{Re}(s_1x,x)=\mathrm{Re}(s_2x,x)=0$ 而

$$D-\alpha E-\beta F=D-\frac{\alpha}{4}(D-A+S_1)-\frac{\beta}{4}(D-A+S_2)=$$

$$\frac{1}{4}\{(4-\alpha-\beta)D+(\alpha+\beta)A-(\alpha S_1+\beta S_2)\}.$$

因 D,A 为 Hermitian 正定阵, 故对 $\forall x\in C^n, x\neq0$ 均有 $\mathrm{Re}((D-\alpha E-\beta F)x,x)>0$. 所以, 当 $0\leq\alpha+\beta\leq4$ 时, $(D-\alpha E-\beta F)^{-1}$ 存在.

注2 从上述证明过程可见, 当 A 与 D 是 Hermitian 正定阵时, $2(2-\tau)+(2\tau-(\alpha+\beta))\mu_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 也即式(23)成立, 这是 $\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$ 的充要条件.

引理[7] 如果对于 $M^{-1}N$ 的某些特征集的每一个 x, A 与 $M^HA^{-H}A+N$ 满足条件

$$x^HAx\neq0 \text{ 且 } [x^H(M^HA^{-H}A+N)x/x^HAx^H]>0, \tag{24}$$

则 $\rho(M^{-1}N)<1$. 反之, 如果 $\rho(M^{-1}N)<1$, 那么对于 $M^{-1}N$ 的每一个特征向量 x, 或者式(24)成立, 或者

$$x^HAx=x^H(M^HA^{-H}A+N)x=0. \tag{25}$$

定理3 设 A 是 Hermitian 阵, 且有由式(2), (4)所指定的分裂的块 GETOR 迭代, $E\doteq E^H$, $F\doteq F^H$, 且令 $0<\tau<2$. 如果对于 $L_{\alpha,\beta,\tau}$ 的某特征集的所有 x 均有 $x^HAx\neq0$. 那么, 则 $\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$ 当且仅当

$$\frac{[(2-\alpha)x^H(E+E^H)x+(2-\beta)x^H(F+F^H)x]}{x^HAx}>(\tau-2).$$

证明 因为 A 是 Hermitian 阵, 所以

$$M^HA^{-H}A+N=M^H+N=$$

$$\frac{1}{\tau}[(2-\tau)D+(2-\alpha)(E+E^H)+(\tau-\beta)(F+F^H)].$$

也即

$$M^HA^{-H}A+N=M^H+N=$$

$$\frac{1}{\tau}\{(2-\tau)A+(2-\alpha)(E+E^H)+(2-\beta)(F+F^H)\}. \tag{26}$$

如果 x 属于 $L_{\alpha,\beta,\tau}$ 的某特征集, 且 $x^HAx\neq0$, 则从引理立即推出定理的证明.

如果考虑通常的 SOR, AOR, TOR 及 ETOR 方法, 也有类似的结果. 不再重述.

注3 顺便地, 我们给出关于 M-矩阵的一个结论.

定义[8]　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为实的$N\times N$矩阵, 且对所有$i\neq j$都有$a_{ij}\leq 0$. 若$\boldsymbol{A}$非奇异且$\boldsymbol{A}^{-1}\geq 0$, 则称$\boldsymbol{A}$为$M$矩阵.

定理4　设$\boldsymbol{A}$为M-矩阵, $0<\tau_1\leq\tau_2\leq 1$. 于是, 若$0\leq\omega_2\leq r_2$, $\frac{\omega_1}{r_1}\leq\frac{\omega_2}{r_2}$, 则有

$$\rho(\boldsymbol{L})\leq\rho(\boldsymbol{L}_{\omega_2,r_2})\leq\rho(\boldsymbol{L}_{\omega_1,r_1})<1,$$
$$\rho(\boldsymbol{L})\leq\rho(\boldsymbol{L}_{\omega_2})\leq\rho(\boldsymbol{L}_{\omega_1})<1,$$
$$\rho(\boldsymbol{B})\leq\rho(\boldsymbol{B}_{\omega_2})\leq\rho(\boldsymbol{B}_{\omega_1})<1.$$

其中, $\boldsymbol{L}_{\omega,r}$, $\boldsymbol{L}_{u_1}$和$\boldsymbol{B}_{\omega}$分别表示通常的(块) AOR, (块) SOR 和(块) JOR 迭代矩阵. 因篇幅关系, 证明从略.

参　考　文　献

1 Ortega J M, Plemmons R J. Extensions of the Ostrowski-Reich theorem for SOR iterative[J]. Lin. Alg. Appl., 1979, 28: 177～191

2 宋永忠. Ostrowski-Reich 定理在 AOR 方法中的推广[J]. 计算数学, 1985, 6(3): 323～326

3 匡蛟勋. 关于解大线性系统的双参数松弛法[J]. 上海师范学院学报(自然科学版), 1983, 19(4): 1～10

4 曾文平. 关于 TOR 方法的收敛性[J]. 高等学校计算数学学报, 1986, 5(1): 65～71

5 曾文平. 关于解大线性系统的推广的双参数松弛法的收敛性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1986, 7(4): 371～380

6 何文章. GETOR 方法的收敛性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1999, 20(1): 6～9

7 宋永忠. AOR 迭代法的收敛性[J]. 计算数学, 1986, 9(3): 332～337

8 Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. New Jess: Prentice-Hall, 1962. 52～91

Application of Ostrowski-Reich Theorem to GETOR Iterative Method

Zeng Wenping

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　The method of generalized expansive two parameter overrelalation, denoted as GETOR iterative method, is defined in this paper. In addition, Ostrowski-Reich type theorems are formed by applying GETOR method, and the existing result is thus extended.

Keywords　linear algebra equations, generalized ETOR iterative method, convergence