第22卷　第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.22　No.4
2001年10月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct.2001

文章编号　1000-5013(2001)04-0337-05

关于 Szasz-Mirakjan 算子推广形式的注记

谭　观　音

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要　研究 Szasz-Mirakjan 算子在 $[0,+\infty)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 区间上的不同推广形式后, 提出 Szasz-Mirakjan 算子在 $(-\infty,+\infty)$ 区间上的一种新的推广形式 $\overline{B}_{u,p}(f,x)$. 利用数学分析和阶估计方法, 讨论新形式 $\overline{B}_{u,p}(f,x)$ 在一定条件下的点态收敛性. 所得结果, 拓广了 Szasz-Mirakjan 算子在无穷区间上的推广形式.

关键词　Szasz-Mirakjan 算子, Bernstein 多项式, 收敛性
中图分类号　O 174.41　　　文献标识码　A

设 $f(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 区间上的函数, Szasz 在文[1]中研究了 Bernstein 多项式在无穷区间上的推广形式

$$B_n(f,x) = e^{-(nx)}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nk)^k}{k!}\quad (x \geq 0, n \in \mathbf{N}).$$

人们将上述算子称为 Szasz-Mirakjan 算子. 此后, 不少学者[2~8]从各个角度对 Szasz-Mirakjan 算子进行推广和研究. 其中, 吴华英在文[2]中给出算子

$$B_n^{\Delta}(f,x) = e^{-(nx)^2}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\frac{(nk)^{2k}}{k!}\quad (x \geq 0, n \in \mathbf{N}),$$

以此作为 Szasz 的推广. 蔡冠华在文[3]中提出算子

$$B_n^{*}(f,x) = \frac{1}{2}e^{-(nx)^2}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\left[f\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right]\frac{(nk)^{2k}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{k}\left[f\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right) - f\left(-\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right]\frac{(nk)^{2k-1}}{k!}\right\}\quad (-\infty < x < +\infty, n \in \mathbf{N}),$$

将它作为 Szasz-Mirakjan 算子在 $(-\infty,+\infty)$ 区间上的推广. 而李富民等在文[4]中给出算子

$$B_n^{\alpha}(f,x) = e^{-(nx)^{\alpha}}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k^{\frac{1}{\alpha}}}{n}\right)\frac{(nk)^{\alpha k}}{k!}\quad (x \geq 0, \alpha \in \mathbf{N}).$$

在文[9]的启发下, 针对文[1~4]的推广形式作了进一步的探讨, 给出了 Szasz-Mirakjan 算子一种新的推广形式为

$$\overline{B}_{n,p}(f,x) =$$

收稿日期　2001-05-09　　　作者简介　谭观音(1967-), 男, 讲师

$$\begin{cases} f(x) & x = 0, \\ \frac{1}{2}e^{-(nx)^p}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left[f\left(\frac{k^{1/p}}{u}\right)+f\left(-\frac{k^{1/p}}{u}\right)\right]\frac{(nk)^{pk}}{k!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{1/p}}{ux}\left[f\left(\frac{k^{1/p}}{u}\right)-f\left(-\frac{k^{1/p}}{u}\right)\right]\frac{(nk)^{pk}}{k!}\right], \end{cases}$$

其中 $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$, $u>0$, $u\in\mathbf{R}^1$, p 为正偶数. 在与文献[1～4]条件等同的情形下, 讨论了算子 $\bar{B}_{n,p}(f,x)$ 的收敛性.

1　引理

引理1　设 $f(x)$ 为定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的函数, 并在任一有限区间上有界, x_0 为 $f(x)$ 的连续点, $x_0>0$. 那么, 对任意的 $p>0$ 和 $\epsilon>0$, 均存在 $\delta>0$, 使得当 $|x^p-x_0^p|\le\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|\le\epsilon$. 同时对任意的 $R\ge x_0^p$, 当 $0\le x^p\le R$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon+\frac{2M(R)}{\delta}|x^p-x_0^p|$, 其中 $M(R)=\sup_{0\le x\le R}|f(x)|$.

证明　已知 $x_0>0$, 且 x_0 是 $f(x)$ 的连续点, 故 $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta_1>0$. 当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$. 又因为函数 $y=x^p$ $(p>0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续的反函数, 所以对上述 $\delta_1>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x^p-x_0^p|\le\delta$ 时, 有 $|x-x_0|<\delta_1$, 从而有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$. 于是, 对任意的 $R\ge x_0^p$, 当 $0\le x^p\le R$ 时, $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon+\frac{2M(R)}{\delta}|x^p-x_0^p|$ 显然成立.

引理2　$\sum_{k=0}^{+\infty}|\lambda-k|^{\delta}\frac{\lambda^k}{k!}\le e^{\lambda}\sqrt{\lambda^{\delta}}$, 其中 $\lambda>0$, $0<\delta\le 2$.

证明　利用 Hölder 不等式不难证明上述式子成立.

引理3　对于 $0<\delta<1$, 有 $\sum_{|\lambda-k|\ge\delta\lambda}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)=O\left\{\exp\left(-\frac{\delta^2\lambda}{3}\right)\right\}$, $\lambda\to+\infty$. 其证明, 见文[10].

引理4　若实数 $\alpha\ge 2$, $x>0$, $A\ge 1$, 则 $|x^\alpha-A^\alpha|\ge x^{\alpha-2}|x-A|$.

证明　先证

$$|x^\alpha-A^\alpha|\ge(x^{\alpha-1}+A^{\alpha-1})|x-A|. \tag{A}$$

当 $x\ge A$ 时, 有 $\frac{x}{A}\ge 1$, $\left(\frac{x}{A}\right)^{\alpha-2}\ge 1$, 从而

$$|x^\alpha-A^\alpha|-(x^{\alpha-1}+A^{\alpha-1})|x-A| = x^\alpha-A^\alpha-(x^\alpha+xA^{\alpha-1}-Ax^{\alpha-1}-A^\alpha)=$$

$$Ax^{\alpha-1}-xA^{\alpha-1}=xA^{\alpha-1}\left(\left(\frac{x}{A}\right)^{\alpha-2}-1\right)\ge 0.$$

由对称性可知, 当 $x\le A$ 时, 式(A)同样成立. 已知 $A\ge 1$, 故有 $|x^\alpha-A^\alpha|\ge(1+x^{\alpha-1})|x-A|$. 从而, 无论 $0<x<1$ 还是 $x\ge 1$, 均有 $|x^\alpha-A^\alpha|\ge x^{\alpha-2}|x-A|$, $(\alpha\ge 2)$ 成立.

2　定理及其证明

定理1　设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数, $\forall R>0$, $f(x)$ 在 $[-R,R]$ 上有界, 且存在实数 $m>0$, 使得当 $x\to+\infty$ 时, 有 $f(x)=O(|x|^m)$. 那么, 在 $f(x)$ 的任一连续点 x_0 处, 有

$$\lim_{u\to+\infty}\bar{B}_{n,p}(f,x_0)=f(x_0)$$

成立. 为证明该定理成立, 我们引进辅助算子

$$B_u^p(f,x)=e^{-(ux)^p}\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(\frac{k^{1/p}}{u}\right)\frac{(uk)^{pk}}{k!}\quad(x\ge 0,\ p,u\in(0,+\infty)).$$

事实上, 本算子也是对李富民等在文 [4] 中给出的 $B_n^{\alpha}(f, x)$ 算子的一种拓广. 对于算子 $B_u^p(f, x)$, 有

定理**2** 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数, $\forall R > 0$, $f(x)$ 在 $[0, R]$ 上有界, 且存在实数 $m > 0$, 使得当 $x \to +\infty$ 时, 有 $f(x) = O(x^m)$. 那么, $f(x)$ 的任一连续点 x_0 处, 有 $\lim\limits_{u \to +\infty} B_u^p(f, x_0) = f(x_0)$ 成立.

证明 当 $x_0 = 0$ 时, 上述结论显然已成立. 以下总设 $x_0 > 0$. 已知 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 因此 $f(x)$ 可表示成 $f(x) = f(x_0) + \epsilon(x)$, 其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$. 因

$$B_u^p(f, x_0) - f(x_0) =$$

$$e^{-(ux_0)^p} \sum_{k=0}^{+\infty} [f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} = e^{-(ux_0)^p} \sum_{0 \le \frac{k}{u^p} < x_0^p} [f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} +$$

$$e^{-(ux_0)^p} \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p} [f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (1)$$

故取 ϵ, δ 如引理1所示, 并使得 $0 < \frac{\delta}{x_0^p} < 1$. 应用引理1及引理2, 可得

$$|\Sigma_1| = \left| e^{-(ux_0)^p} \sum_{0 \le \frac{k}{u^p} < x_0^p} [f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} \right| \le$$

$$e^{-(ux_0)^p} \sum_{0 \le \frac{k}{u^p} < x_0^p} \left[\epsilon + \frac{2M(x_0^p)}{\delta} \left| \frac{k}{(u^p} - x_0^p \right| \right] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} <$$

$$\epsilon + \frac{2M(x_0^p)}{\delta} \frac{(ux_0)^{p/2}}{u^p} = \epsilon + \frac{2M(x_0^p) x_0^{p/2}}{u^{p/2}\delta} \to 0, \quad (2)$$

$$\Sigma_2 = e^{-(ux_0)^p} \Big(\sum_{\frac{k}{u^p} < x_0^p + \delta} + \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p + \delta} \Big) [f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} = \Sigma_{21} + \Sigma_{22}, \quad (3)$$

式中 $\Sigma_{21} = e^{-(ux_0)^p} \sum_{\frac{k}{u^p} < x_0^p + \delta} [f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!}$, $\Sigma_{22} = e^{-(ux_0)^p} \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p + \delta} [f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0)] \cdot \frac{(ux_0)^{pk}}{k!}$. 根据引理1, 可得

$$|\Sigma_{21}| \le e^{-(ux_0)^p} \sum_{\frac{k}{u^p} < x_0^p + \delta} \left| f(\frac{k^{1/p}}{u}) - f(x_0) \right| \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} \le \epsilon, \quad (4)$$

$$|\Sigma_{22}| \le e^{-(ux_0)^p} \left(\left| \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p + \delta} f(\frac{k^{1/p}}{u}) \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} \right| + \left| \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p + \delta} [f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} \right| \right).$$

记 $\Sigma_{22}^1 \le e^{-(ux_0)^p} \left| \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p + \delta} f(\frac{k^{1/p}}{u}) \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} \right|$, $\Sigma_{22}^2 \le e^{-(ux_0)^p} \left| \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p + \delta} [f(x_0)] \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} \right|$. 应用引理3, 可以得到

$$|\Sigma_{22}^2| \le e^{-(ux_0)^p} \sum_{\frac{k}{u^p} \ge x_0^p + \delta} |f(x_0)| \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} \le$$

$$e^{-(ux_0)^p} |f(x_0)| \sum_{k - (ux_0)^p \ge \delta u^p} \frac{(ux_0)^{pk}}{k!} = O\{\exp(-\frac{\delta^2}{3}(\frac{u}{x_0})^p)\}, \quad (5)$$

$$\Sigma_{22}^{1}\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq u^p\delta}\left|f\left(\frac{k^{1/p}}{u}\right)\right|\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}=O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}\frac{k^{m/p}}{u^m}\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}\right).$$

已知$f(x)=O(x^m)$, $x\to+\infty$时, 则$f\left(\frac{k^{1/p}}{u}\right)=O\left(\left(\frac{k^{1/p}}{u}\right)^m\right)$, $k\to+\infty$时. 现令q取$\frac{m}{p}$的整数部分, 记为$q=\left[\frac{m}{p}\right]$, 于是有$q\leq\frac{m}{p}<q+1$. 为了估计$O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}\frac{k^{m/p}}{u^m}\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}\right)$, 我们先来估计

$$O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}\frac{k^q}{u^{pq}}\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}\right),\quad O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}\frac{k^{q+1}}{u^{p(q+1)}}\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}\right).$$

根据引理3有

$$O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}\frac{k^q}{u^{pq}}\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}\right)=O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}x_0^{pq}\frac{(ux_0)^{p(k-q)}}{k!\,k^{-q}}\right)=O(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\bullet$$

$$\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}\frac{(ux_0)^{p(k-q)}}{(k-q)!})=O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p-q}\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}\right)=$$

$$O\left(\exp\left\{-\frac{1}{3}(ux_0)^p\left(\frac{u^p\delta-q}{u^px_0^p}\right)^2\right\}\right)=$$

$$O\left(\exp\left\{-\frac{1}{3}(ux_0)^p\left(\frac{\delta}{x_0^p}-\frac{q}{u^px_0^p}\right)^2\right\}\right)=O\left(\exp\left(-\frac{1}{3}\delta^2\left(\frac{u}{x_0}\right)^p\right)\right).$$

同理, 可证$O\left(\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{k-(ux_0)^p\geq\delta u^p}\frac{k^{q+1}}{u^{p(q+1)}}\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}\right)=O\left(\exp\left(-\frac{1}{3}\delta^2\left(\frac{u}{x_0}\right)^p\right)\right)$. 根据夹逼定理, 可得

$$\Sigma_{22}^{1}\leq\mathrm{e}^{-(ux_0)^p}\sum_{\frac{k}{u^p}\geq x_0^p+\delta}\left|f\left(\frac{k^{1/p}}{u}\right)\right|\frac{(ux_0)^{pk}}{k!}=O\left(\exp\left(-\frac{1}{3}\delta^2\left(\frac{u}{x_0}\right)^p\right)\right).\tag{6}$$

综合Σ_1, Σ_2, Σ_{21}, Σ_{22}, Σ_{22}^1和Σ_{22}^2, 即综合式(1)～(6), 可得

$$\lim_{u\to+\infty}B_u^p(f,x_0)=(f,x_0).$$

特别地, 当p取正偶数即$p=2m$, $p,m\in\mathbf{N}$时, $B_u^p(f,x)$的形式变为

$$B_u^{2m}(f,x)=\mathrm{e}^{-(ux)^{2m}}\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(\frac{k^{\frac{1}{2m}}}{u}\right)\frac{(ux)^{2mk}}{k!}.$$

此时式中自变量x由原来的$x\geq0$, 可扩展为$-\infty<x<+\infty$.

定理1的证明可先构造函数$g_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $g_2(x)=\frac{x}{2}[f(x)-f(-x)]$. 当$x_0=0$时, 定理1显然成立. 以下总假定$x_0\neq0$, 则有

$$\overline{B}_{n,p}(f,x)=B_u^p(g_1,x)+\frac{1}{x}B_u^p(g_2,x).$$

那么, (A) 当$x_0>0$时, $g_1(x)$, $g_2(x)$均满足定理2中的条件, 故有

$$\lim_{u\to+\infty}\overline{B}_{u,p}(f,x_0)=\lim_{u\to+\infty}B_u^p(g_1,x_0)+\lim_{u\to+\infty}B_u^p(g_2,x_0)\frac{1}{x_0}=$$

$$g_1(x_0)+g_2(x_0)\frac{1}{x_0}=\frac{f(x_0)+f(-x_0)}{2}+\frac{1}{x_0}\bullet x_0\bullet\frac{f(x_0)-f(-x_0)}{2}=f(x_0).$$

(B) 当$x_0<0$时, 因p为正偶数(即$p=2m$, $m\in\mathbf{N}$), 所以函数$B_u^p(g_1,x)$, $\frac{1}{x}B_u^p(g_2,x)$对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$满足$B_u^p(g_1,-x)=B_u^p(g_1,x)$, $\frac{1}{-x}B_u^p(g_2,-x)=-\frac{1}{x}B_u^p(g_2,x)$. 从而有

$$\lim_{u\to+\infty}\overline{B}_{u,p}(f,x_0)=\lim_{u\to+\infty}B_u^p(g_1,-x_0)-\frac{1}{-x_0}\lim_{u\to+\infty}B_u^p(g_2,-x_0)=$$
$$\frac{f(-x_0)+f(x_0)}{2}+\frac{1}{x_0}\cdot(-x_0)\cdot\frac{f(x_0)-f(-x_0)}{2}=f(x_0).$$

于是, 无论 $x_0=0$, 还是 $x_0\neq 0$, 定理1均成立.

3 结束语

本文讨论了 Szasz-Mirakjan 算子, 在$(-\infty,+\infty)$区间上的一种新的推广形式 $\overline{B}_{u,p}(f,x)$. 所得结论表明, 文献[1～3]所给出的算子均是本文的特殊情况, 而蔡冠华在文献[3]中讨论在$(-\infty,+\infty)$区间上的推广算子 $B_n^*(f,x)$ 恰是本文 $\overline{B}_{u,p}(f,x)$ 算子, $p=2, u\in\mathbf{N}$ 时的特例. 当然, $\overline{B}_{u,p}(f,x)$ 的一致收敛性和逼近度, 则有待于我们进一步研究.

参 考 文 献

1 Szasz O. Generalization of Bernstein polynomials to the infinite interval[J]. Journal of Research Nat. Bur. ofstandards, 1950, (45): 239～245

2 吴华英. Bernstein 多项式在无穷区间上的推广[J]. 数学进展, 1986. 5(2): 185～188

3 蔡冠华. 关于 Bernstein 多项式(-∞, +∞)区间上的推广形式[J]. 南京工学院学报, 1988, 18(5): 134～138

4 李富民, 常心怡. Szasz-Mirakjan 算子的推广形式[J]. 陕西师范大学学报, 1988, 16(1): 1～5

5 姜建功. Szasz-Mirakjan 算子对不连续函数的逼近研究[J]. 烟台大学学报, 1992, (4): 13～17

6 张 俭, 谷 峰. 关于 Bernstein 多项式在无穷区间上的另一普遍推广形式[J]. 哈尔滨师范大学学报(自然科学版), 1993, 9(3): 14～19

7 丁春梅. 修正的 Szasz 算子的高阶导数与函数的光滑性[J]. 山西师范大学学报, 1999, 13(4): 1～7

8 宋儒英, 王坚勇, 角形域上二维 Bernstein 算子的一致逼近定理[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1999, 38(5): 783～786

9 庄天山, 陈祖礼. 任意 $k+1$个相邻自然数 k 次方的 k 次差等于 k 阶乘[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2000, 21(2): 121～123

10 Hardy G H. Divergent Series[M]. Oxford: Oxford, 1949. 200～202

A Note on the Form of Extending Szasz-Mirakjan Operator

Tan Guanyin

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract After studying different forms of extending Szasz-Mirakjan operator at the interval $[0,+\infty)$ or $(-\infty,+\infty)$, the author advances $\overline{B}_{u,p}(f,x)$ as a new form of extending Szasz-Mirakjan operator at the interval $(-\infty,+\infty)$. the pointwise convergence of the new form $\overline{B}_{u,p}(f,x)$ under definite condition is discussed by using mathematical analysis and method of order estimate, The results so obtained have broadened the form of extending Szasz-Mirakjan operator at infinite interval.

Keywords Szasz-Mirakjan operator, Bernstein polynomial, convergence