

# 对角型拟线性双曲组的整体经典解

郑永树

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

**摘要** 研究对角型拟线性严格双曲组的柯西问题, 其初值为  $C^1$ -模  $L^1$ -模和全变差均有界的函数. 证明如果方程组是弱线性退化时, 对于小的初值在  $t = 0$  存在唯一的整体经典解. 如果方程组不是弱线性退化的, 给出其经典解的生命区间估计.

**关键词** 拟线性双曲组, 柯西问题, 整体经典解

**中图分类号** O 241.82

**文献标识码** A

关于具一般形式的一阶拟线性严格双曲组的柯西问题

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$t = 0, \quad \mathbf{u} = \mathcal{Q}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

在式(1), (2)中,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$  为  $(t, x)$  的未知向量函数,  $\mathcal{Q}(x) = (\mathcal{Q}_1(x), \dots, \mathcal{Q}_n(x))^T$  为已知初值向量函数,  $A(\mathbf{u}) = (a_{ij}(\mathbf{u}))$  为具适当光滑元素  $a_{ij}(\mathbf{u})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) 的  $n \times n$  矩阵函数. 文[1~3]考虑在  $L^\infty$  意义下, 方程组(1)的所有特征为真正非线性的, 或部分特征是线性退化的, 如果初值  $\mathcal{Q}(x) \in C^2$ , 具紧支集, 证明了柯西问题(1), (2)的光滑解必在有限时间产生奇性. 李大潜等人引入了弱线性退化的概念. 在弱线性退化意义下, 文[4]考察了初值  $\mathcal{Q}(x) \in C^1(\mathbb{R})$  具紧支集, 文[5]推广了所考察的初值函数类. 即  $\mathcal{Q}(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , 并满足

$$\sup_x \{ (1 + |x|)^{1+\mu} (|\mathcal{Q}(x)| + |\mathcal{Q}'(x)|) \} < \infty \quad (\mu > 0 \text{ 为常数}). \quad (3)$$

对于上述具“小性”的初值, 关于柯西问题(1), (2)的经典解, 得到了完整的结果. 本文将考虑对角型拟线性的严格双曲组, 在文[4, 5]的弱线性退化意义下, 考察一类比满足条件(3)更广的初值函数类. 从而, 得到其柯西问题的经典解与文[5]相类似的结果.

## 1 问题与主要结果

考虑下述柯西问题

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (4)$$

收稿日期 2001-03-20 作者简介 郑永树(1939-), 男, 教授

基金项目 福建省自然科学基金资助项目

$$t = 0, \quad u = \epsilon \mathcal{Q}(x), \quad x \in R. \quad (5)$$

在式(4), (5)中,  $\epsilon > 0$  为小参数,  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$  为  $(t, x)$  的未知向量函数. 有

$$\Lambda(u) = \text{diag}\{\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u)\}, \quad \lambda_i(u) \in C^2(R^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\lambda_1(0) < \lambda_2(0) < \dots < \lambda_n(0).$$

假设初值满足

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= (\mathcal{Q}_1(x), \dots, \mathcal{Q}_n(x))^T \text{ 是 } x \text{ 的 } C_b^1 \text{ 向量函数,} \\ \mathcal{Q}_i^{(k)}(x) &\in L^1(R) \quad k = 0, 1; i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

主要结果为

**定理 1** 假设严格双曲组(4)是弱线性退化的, 即当  $|s|$  充分小时, 有

$$\lambda(se_i) > \lambda(0) \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

其中  $e_i = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)^T$ . 如果初值  $\mathcal{Q}(x)$  满足条件(7), 则存在充分小的  $\epsilon_0 > 0$ . 使得对任意的  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ , 柯西问题(4), (5)在整个上半平面  $t \geq 0$  上存在唯一的  $C^1$ -解.

**定理 2** 假设严格双曲组(4)不是弱线性退化的. 即存在非空的指标集  $J \subset \{1, \dots, n\}$ , 当且仅当  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus J$  时,  $\lambda(u)$  是弱线性退化的, 对任意给定的  $i \in J$ , 存在整数  $\alpha_i \geq 0$ , 使

$$\frac{\partial^k \lambda_i}{\partial t_i^k}(0) = 0 \quad k = 1, \dots, \alpha_i, \quad \frac{\partial^{\alpha_i+1} \lambda_i}{\partial t_i^{\alpha_i+1}}(0) \neq 0. \quad (9)$$

令

$$\alpha = \min\{\alpha_i \mid i \in J\}, \quad J_1 = \{i \in J \mid \alpha_i = \alpha\}. \quad (10)$$

并且, 对于满足条件(7)的初值, 存在  $i_0 \in J_1$ ,  $\mathcal{Q}_{i_0}(x)$  为非平凡的. 因此, 存在充分小的  $\epsilon_0 > 0$ , 使得对任意给定的  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ , 柯西问题(4), (5)的  $C^1$ -解  $u = u(t, x)$ , 其一阶偏导数必在有限时间破裂, 并存在与  $\epsilon$  无关的正常数  $C, \bar{C}$ , 其  $C^1$ -解的生命区间满足

$$C\epsilon^{-(1+\alpha)} \leq \tilde{T}(\epsilon) \leq \bar{C}\epsilon^{-(1+\alpha)}. \quad (11)$$

定理 1, 2 也是文[6]的推广.

## 2 定理 1 的证明

首先, 由柯西问题(4), (5)直接得到如下引理.

**引理 1** 在柯西问题(4), (5)的  $C^1$ -解的存在区域上, 成立如下估计

$$u(t, x) \in C^0 \cap \mathcal{Q}(x) \in C^0. \quad (12)$$

根据经典解的局部存在唯一性定理<sup>[7]</sup>, 只要再对  $C^1$ -解的一阶偏导数  $\frac{\partial u_i(t, x)}{\partial x}$  进行估计.

对任给的指标  $i (1 \leq i \leq n)$ , 令  $x = x_i(t, \beta_i)$  为过点  $(0, \beta_i)$  的第  $i$ -特征线. 于是有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i(t, \beta_i) &= \lambda_i(u(t, x_i(t, \beta_i))), \\ x_i(0, \beta_i) &= \beta_i \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

并过第  $i$ -特征线上点  $(s, x_i(s, \beta_i)) (0 \leq s \leq t)$ , 作第  $j (j \neq i)$  特征线交  $ox$  轴于点  $(0, y_j(s, \beta_i))$ . 那么有

$$y_j(0, \beta_i) = \beta_i, \quad x_i(t, \beta_i) = x_j(t, y_j(t, \beta_i)), \quad (14)$$

$$u_j(s, x_i(s, \beta_i)) = \mathcal{Q}(y_j(s, \beta_i)), \quad (15)$$

$$\frac{d}{ds} u_j(s, x_i(s, \beta_i)) = \epsilon \varphi'_j(y_j(s, \beta_i)) \frac{dy_j(s, \beta_i)}{ds}, \quad (16)$$

其中  $\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x}$ .

由文 [8] 得到

$$\frac{\partial x_i(t, \beta_i)}{\partial \beta_i} = e^{A_i(t)} \left( 1 + \epsilon \varphi'_i(\beta_i) \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}(u(s, x_i(s, \beta_i))) e^{-A_i(s)} ds \right), \quad (17)$$

其中

$$A_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}(u(s, x_i(s, \beta_i))) \frac{\partial u_j(s, x_i(s, \beta_i))}{\partial x} ds.$$

因为  $\frac{du_i}{ds} = (\lambda - \lambda_i) \frac{\partial u_i}{\partial x}$ , 由式(16)得

$$\frac{\partial u_i(s, x_i(s, \beta_i))}{\partial x} = \frac{1}{\lambda - \lambda_i} (u(s, x_i(s, \beta_i)) \epsilon \varphi'_j(y_j(s, \beta_i))) \frac{dy_j(s, \beta_i)}{ds}.$$

所以

$$A_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_{\beta_j}^{y_j(t, \beta_j)} \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \frac{\partial \lambda}{\partial u_i} \right) (u(s, x_i(s, \beta_i))) \epsilon \varphi'_j(y_j) dy_j. \quad (18)$$

往后用  $c_i (i=1, 2, \dots)$ , 表示与  $\epsilon$  无关的正常数.

**引理 2** 假设初值满足条件(7). 则在柯西问题(4), (5)的  $C^1$ -解的存在区域上, 当  $\epsilon$  充分小时, 成立如下估计

$$|A_i(t)| \leq c_i \epsilon \quad (1 \leq i \leq n). \quad (19)$$

**证明** 由式(6)及引理 1, 当  $\epsilon$  充分小时, 存在正数  $\delta_0$  和  $\delta$ , 使得

$$\left. \begin{aligned} |\lambda(u) - \lambda_j(v)| &> \delta_0, \quad \forall |u|, |v| < \delta \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, n, \\ \left| \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u_j} \right| &\leq \delta_0, \quad \left| \frac{\partial^2 \lambda(u)}{\partial u_j \partial u_i} \right| \leq \delta_0, \quad \forall |u| < \delta \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由式(18)和(20)得

$$|A_i(t)| \leq c_2 \epsilon \left( \sum_{j < i} \int_{\beta_j}^{y_j(t, \beta_j)} |\varphi'_j(y_j)| dy_j + \sum_{j > i} \int_{y_j(t, \beta_j)}^{\beta_j} |\varphi'_j(y_j)| dy_j \right).$$

由条件(7)知,  $\varphi'(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , 因此由上式可得到估计式(19). 引理 2 证毕.

**引理 3** 假设方程组(4)为弱线性退化, 初值满足条件(7). 那么, 在柯西问题(4), (5)的  $C^1$ -解的存在区域上, 当  $\epsilon$  充分小时, 有如下估计式

$$\left| \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}(u(s, x_i(s, \beta_i))) e^{-A_i(s)} ds \right| \leq c_3 \epsilon. \quad (21)$$

**证明** 由于方程组(4)为弱线性退化, 根据式(8)得到当  $\epsilon$  充分小时, 有

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_i}(\epsilon \varphi(\beta_i) e_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

先证  $i=1$  时, 估计式(21)成立. 由式(22)并根据 Hadamard 公式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(u(s, x_1(s, \beta_1))) &= \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(u(s, x_1(s, \beta_1))) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(\epsilon \varphi(\beta_1) e_1) = \\ &= \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(\epsilon \varphi(\beta_1), \epsilon \varphi(y_2(s, \beta_1)), \dots, \epsilon \varphi(y_n(s, \beta_1))) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(\epsilon \varphi(\beta_1), 0, \dots, 0) = \end{aligned}$$

$$\sum_{j=2}^n \frac{\partial \lambda}{\partial u_j \partial u_1} (\epsilon \mathcal{P}(\beta_1), \tau \mathcal{Q}(y_2(s, \beta_1)), \dots, \tau \mathcal{Q}(y_n(s, \beta_1))) \epsilon \mathcal{Q}(y_j(s, \beta_1)) d\tau \quad (23)$$

由式(19), (20)和(23), 得

$$\left| \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} (u(s, x_1(s, \beta_1))) e^{-A_1(s)} ds \right| \leq c_4 \epsilon \sum_{j=2}^n \left| \mathcal{Q}(y_j(s, \beta_1)) \right| ds \quad (24)$$

因为由式(14), 得

$$\frac{\partial x_j(s, y_j)}{\partial y_j} \frac{dy_j(s, \beta_j)}{ds} = (\lambda_j - \lambda_j)(u(s, x_1(s, \beta_1))) \quad j = 2, \dots, n, \quad (25)$$

所以当  $\epsilon$  充分小时, 由式(19), (20), (24)和(25), 以及条件(7)知,  $\mathcal{Q}(x) \in L^1(R)$ , 得

$$\left| \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} (u(s, x_1(s, \beta_1))) e^{-A_1(s)} ds \right| \leq c_5 \epsilon \sum_{j=2}^n \left| \mathcal{Q}(y_j) \right| dy_j \leq c_3 \epsilon$$

类似地可证得当  $i = 2, \dots, n$  时, 估计式(21)也成立. 引理3证毕.

定理1的证明. 首先估计  $\left| \frac{\partial x_i(t, \beta_i)}{\partial \beta_i} \right|$  之正下界, 由式(17), (19)和(21), 得到当  $\epsilon$  充分小时, 有

$$\left| \frac{\partial x_i(t, \beta_i)}{\partial \beta_i} \right| \geq c_6 (1 - c_3 \epsilon^2 |\mathcal{Q}(\beta_i)|) \geq c_7 \quad i = 1, \dots, n \quad (26)$$

因为

$$u_i(t, x_i(t, \beta_i)) = \epsilon \mathcal{P}(\beta_i) \quad i = 1, \dots, n, \quad (27)$$

所以, 式(27)对  $\beta_i$  求偏导数, 得

$$\frac{\partial u_i(t, x_i(t, \beta_i))}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i(t, \beta_i)}{\partial \beta_i} = \epsilon \mathcal{P}(\beta_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (28)$$

因此, 由条件(7)及式(26), (28), 得到存在充分小的  $\epsilon_0 > 0$ , 使得对任意的  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ , 有

$$\left| \frac{\partial u_i(t, x_i)}{\partial \alpha} \right| \geq c_8 \epsilon \quad i = 1, \dots, n \quad (29)$$

所以, 根据柯西问题  $C^1$ -解的局部存在唯一性定理, 以及先验估计式(12), (29), 得到定理1的结论成立. 定理1证毕.

### 3 定理2的证明

引理4 如果特征  $\lambda(u)$  满足条件(9), 则柯西问题(4), (5)的  $C^1$ -解在其存在区域上, 当  $\epsilon$  充分小时, 有

$$\left| \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_i} (u(s, x_i(s, \beta_i))) e^{-A_i(s)} ds \right| \leq c_9 (\epsilon + \epsilon^\alpha t). \quad (30)$$

证明 为方便起见, 不失一般性, 设  $i = 1$ . 由式(9), 当  $\epsilon$  充分小时, 得

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} (\epsilon \mathcal{P}(\beta_1) e_1) \right| \leq c_{10} \epsilon^\alpha. \quad (31)$$

于是, 由式(19), (31)得

$$\int_0^t \left| \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} (\epsilon \mathcal{P}(\beta_1) e_1) \right| e^{-A_1(s)} ds \leq c_{11} \epsilon^\alpha t \quad (32)$$

另一方面由式(23)及其下的证明, 得

$$\left| \int_0^t \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_1}(u(s, x_1(s, \beta_1))) - \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_1}(\epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) e_1) \right| e^{-A_1(s)} ds \leq c_{12} \epsilon \quad (33)$$

故由式(32), (33), 得式(30)成立. 引理4证毕.

定理2的证明. 先证生命区间  $\tilde{T}(\epsilon)$  之下界. 对于任意的  $i \in J$ , 当  $\epsilon$  充分小时, 由于  $\alpha_i > 0$  并由式(30)得

$$\left| \int_0^t \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_i}(u(s, x_1(s, \beta_1))) e^{-A_1(s)} ds \right| \leq c_{13}(\epsilon + \epsilon^\alpha t). \quad (34)$$

从而, 由式(17), (19)和(34), 得

$$\frac{\partial x_i(t, \beta_1)}{\partial \beta_i} \leq c_{14}(1 - \epsilon^{\alpha+1} t), \quad \forall i \in J. \quad (35)$$

因此, 由式(28), (35)可知, 存在与  $\epsilon$  无关的正数  $C$ , 使得当  $0 \leq t \leq C\epsilon^{-(\alpha+1)}$  时,  $\left| \frac{\partial u_i(t, x)}{\partial x} \right|$  具有仅与初值有关的上界. 因此, 柯西问题(4), (5)存在唯一的  $C^1$ -解. 故得

$$\tilde{T}(\epsilon) \geq C\epsilon^{-(1+\alpha)}. \quad (36)$$

往证生命区间  $\tilde{T}(\epsilon)$  之上界. 不失一般性, 设  $i_0 = 1 \in J$ ,  $\mathcal{Q}(x)$  为非平凡的. 于是, 由  $\mathcal{Q}^{(k)}(x) \in L^1(R)$ ,  $k = 0, 1$ . 不难证得, 它至少存在  $x^+, x^- \in R$ , 分别使

$$\mathcal{Q}(x^+) (\mathcal{Q}(x^+))^\alpha > 0, \quad \mathcal{Q}(x^-) (\mathcal{Q}(x^-))^\alpha < 0. \quad (37)$$

不失一般性, 设

$$\frac{\partial^{1+\alpha} \lambda}{\partial u_1^{1+\alpha}}(0) > 0. \quad (38)$$

取  $\beta_1 = x^-$ , 则

$$\mathcal{Q}(\beta_1) (\mathcal{Q}(\beta_1))^\alpha < 0 \quad (39)$$

所以, 当  $\epsilon$  充分小时, 有

$$\epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(\epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) e_1) = \epsilon^{1+\alpha} \mathcal{Q}(\beta_1) (\mathcal{Q}(\beta_1))^\alpha \left\{ \frac{\partial^{1+\alpha} \lambda}{\partial u_1^{1+\alpha}}(0) + o(\epsilon) \right\}. \quad (40)$$

于是有

$$\epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(\epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) e_1) e^{-A_1(s)} ds < c_{15} \epsilon^{1+\alpha} \mathcal{Q}(\beta_1) (\mathcal{Q}(\beta_1))^\alpha \frac{\partial^{1+\alpha} \lambda}{\partial u_1^{1+\alpha}}(0) t < 0 \quad (41)$$

从而, 由式(33), (41)得

$$\begin{aligned} & 1 + \epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(u(s, x_1(s, \beta_1))) e^{-A_1(s)} ds \\ & 1 + \epsilon \left| \mathcal{Q}(\beta_1) \right| \int_0^t \left| \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(u(s, x_1(s, \beta_1))) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(\epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) e_1) \right| e^{-A_1(s)} ds + \\ & \quad \epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}(\epsilon \mathcal{Q}(\beta_1) e_1) e^{-A_1(s)} ds \\ & 1 + \epsilon c_{16} \epsilon + c_{15} \epsilon^{1+\alpha} \mathcal{Q}(\beta_1) (\mathcal{Q}(\beta_1))^\alpha \frac{\partial^{1+\alpha} \lambda}{\partial u_1^{1+\alpha}}(0) t \end{aligned} \quad (42)$$

因此, 由式(17), (19), (41)和(42), 得

$$\frac{\partial x_1(t, \beta_1)}{\partial \beta_1} \leq c_{17} - c_{18} \epsilon^{1+\alpha} t$$

所以, 当  $t \rightarrow \frac{c_{17}}{c_{18}} \epsilon^{-(1+\infty)}$  时, 有  $\frac{\partial x_1(t, \beta_1)}{\partial \beta_1} \rightarrow 0^+$ , 则

$$\frac{\partial u(t, x_1(t, \beta_1))}{\partial x_1}.$$

故得到存在与  $\epsilon$  无关的正数  $\bar{C}$ , 使得

$$\tilde{T}(\epsilon) \leq \bar{C} \epsilon^{-(1+\infty)}. \quad (43)$$

综合式(36), (43), 得到定理2的结论成立. 定理2证毕.

## 参 考 文 献

- 1 John F. Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation [J]. Comm. Pure Appl Math., 1974, 27: 377~ 405
- 2 Homander L. The life span of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations [J]. Institute Mittag-Leffler, 1985, (5): 87~ 96
- 3 Liu Taiping Development of singularities in the nonlinear waves for quasi-linear hyperbolic partial differential equations [J]. J. of Diff. Equations, 1979, 33: 92~ 111
- 4 Li Tatsien, Zhou Yi, Kong Dexing Weak linear degeneracy and global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems [J]. Comm. in Part. Diff. Equations, 1994, 19: 1263~ 1317
- 5 Li Tatsien, Zhou Yi, Kong Dexing Global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems with decay initial data [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1997, 28(8): 1299~ 1332
- 6 孔德兴. 对角型拟线性双曲组经典解的奇性形成及其生命区间 [J]. 河南大学学报(自然科学版), 1993, 23(2): 7~ 11
- 7 李大潜, 俞文彪. 一阶拟线性双曲型方程组的柯西问题 [J]. 数学进展, 1963, 7(2): 152~ 171
- 8 Zheng Yongshu, Liu Fagui A necessary and sufficient condition for global existence of classical solutions to Cauchy problem of quasilinear hyperbolic systems in diagonal form [J]. Acta Math. Sci., 2000, 20B(4): 571~ 576

## Global Classical Solution to Quasilinear Hyperbolic System of Diagonal Form

Zheng Yongshu

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** A study is made on Cauchy problem of strictly quasilinear hyperbolic system of diagonal form, of which the initial values are  $C^1$ -mode,  $L^1$ -mode and function with bounded total variation. As proved by the author, if the equation set are in weak linear degeneration, there exists unique global classical solution to small initial value at  $t=0$ ; if the equation set are not in weak linear degeneration, the life interval estimation of their classical solutions are given.

**Keywords** quasi-linear hyperbolic system, Cauchy problem, global classical solution