第 22 卷　第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 22　No. 3
2001 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2001

文章编号　1000-5013(2001) 03-0321-05

应用电荷运动规律确定电磁场运动规律

陈强顺[①]　　王建成[②]

(① 同济大学物理系, 上海 200092; ② 华侨大学信息科学与工程学院, 泉州 362011)

摘要　运用向量场与微分形式的缩并(内积)和外微分运算, 并依照 Poincare 定理论证电荷的运动规律可确定电磁场的运动规律.

关键词　微分形式, 外微分, 缩并(内积), Poincare 定理

中图分类号　O 442 : O 411.1　　文献标识码　A

人们在能量表象的框架下, 发现机械能守恒定律、线动量守恒定律和角动量守恒定律, 可分别由惯性系的时间均匀性、空间均匀性和空间各向同性导出[1]. 即经典力学中的 3 个著名守恒定律直接源于时空的特性. 这就是所谓的物理规律的本原问题[2]. 从逻辑认识上可引出一个简单推理: 电磁场的运动规律也存在本原问题的探讨. 电磁场运动的根本规律遵循着麦克斯韦电磁场方程组. 在统一的电磁理论中, 麦克斯韦电磁场方程组概括和表述了电磁场的运动规律. 依靠统一的现代数学几何方法, 即运用微分流形和微分形式这一数学理论, 可解答电磁场运动规律的本原问题. 文中利用微分形式、外微分运算、外微分形式中向量场与微分形式的缩并(内积), 并依据 Poincare 定理, 论证了电荷守恒定律可确定麦克斯韦方程组的数学形式[3,4]. 本文以明确、坚实和深刻的解答, 以及严格的数学手段论证这一本原问题.

1　麦克斯韦电磁场方程组及其缩写式

众所周知, 电磁场的运动规律可归结为麦克斯韦电磁场方程组, 它们通常表达为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, &&\nabla\times\boldsymbol{H}-\partial\boldsymbol{D}=\boldsymbol{J},\\&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, &&\nabla\times\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{B}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式(1)可缩写为式(2), 即[3]

$$\partial\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau}=\boldsymbol{J}^{\tau},\qquad \partial\boldsymbol{F}^{\upsilon\tau}=0,\upsilon,\tag{2}$$

式中 $\tau=0,1,2,3$, $\boldsymbol{J}^{\tau}=\boldsymbol{J}^{\tau}(J^{0},J^{1},J^{2},J^{3})=\boldsymbol{J}^{\tau}(\rho,J_{x},J_{y},J_{z})$, $\partial_{\upsilon}=\partial_{\upsilon}(\partial_{0},\partial_{1},\partial_{2},\partial_{3})=\partial_{\upsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

$\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau}$和 $\boldsymbol{F}^{\upsilon\tau}$分别是描述电磁场 $\boldsymbol{D}$～$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{W}$～$\boldsymbol{B}$ 的二阶反对称张量. 其矩阵表达式分别为

收稿日期　2000-10-11　　作者简介　陈强顺(1940-), 男, 教授

$$\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau}=\begin{bmatrix}0 & -D_1 & -D_2 & -D_3\\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2\\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1\\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0\end{bmatrix}, \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{F}^{\upsilon\tau}=\begin{bmatrix}0 & -B_1 & -B_2 & -B_3\\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2\\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1\\ E_3 & E_2 & -E_1 & 0\end{bmatrix}. \tag{3b}$$

事实上, 式(2)构成一组麦克斯韦电磁场方程组的张量方程. 至此, 利用 $\boldsymbol{J}^{\tau}(\rho, J^1, J^2, J^3)$ 可引进电流向量场 $\boldsymbol{g}$, 即

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{J}^{\tau}\partial_{\tau}=\rho\partial_0+J^1\partial_1+J^2\partial_2+J^3\partial_3, \tag{4a}$$

或

$$\partial\boldsymbol{J}^{\tau}=\partial_0+\partial_1 J^1+\partial_2 J^2+\partial_3 J^3. \tag{4b}$$

2　缩并运算引进 Minkowski 时空坐标系的讨论

在 Minkowski 时空坐标系中, 建立有关的微分形式的基因和相应的关系式, 以便为本文的数学论证作准备. 试将向量场与微分形式的缩并(内积)运算, 以及外微分运算引入讨论之中. 现以 $\Phi(M)$ 标记流形 M 上向量场全体构成的集合; 以 $\Lambda^p(M)$ 标记流形 M 上的任意 p 次微分形式(简称 p 形式)的全体. 对于 $\upsilon\in\Phi(M)$ 及 $\omega\in\Lambda^p(M)$, 依照微分形式的数学理论, 向量场 υ 与 p 形式的缩并(内积)成为$(p-1)$次微分形式. 记作 $i_\upsilon\omega$, 定义为[5~8]

$$\left.\begin{aligned}&i_\upsilon\omega(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_{p-1})=\omega(\upsilon,\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_{p-1}),\\&\upsilon_i\in\Phi(M),\quad i=1,2,3,\cdots,p-1.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

显然, $i_\upsilon\omega$ 为 p 形式 $\Lambda^p(M)$ 到$(p-1)$形式 $\Lambda^{p-1}(M)$ 的线性映射. 这意味着微分形式每经一次缩并运算, 它的次就下降一次. 这同外微分运算的情形恰相反. 微分形式每经一次外微分运算, 它的次将上升一次. 现将上述运算应用于 Minkowski 时空坐标系的讨论. Minkowski 时空坐标系是, 由三维空间坐标(x, y, z)和一维时间坐标 t 所构成的四维系. 其流形记为

$$M=R^4=\{(x^0,x^1,x^2,x^3)=(t,x,y,z),\quad x^\tau\in R,\quad \tau=0,1,2,3\},$$

在四维系中, 相应的 4-形式 $\Lambda^4(R^4)$ 的基为

$$\mu=\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3. \tag{6}$$

根据式(5), 利用缩并 $i_{\partial_\tau}\mu=\mu_\tau$, 则不难求得 3-形式 $\Lambda^3(R^4)$ 的基为

$$\left.\begin{aligned}&\mu_0=\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3,\qquad \mu_1=-\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3,\\&\mu_2=\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3,\qquad \mu_3=-\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由于 3-形式的基共 4 个, 自然可用它表示 Minkowski 时空坐标系中的向量场.

若 V 是 R^4 上的向量场, 即 $V=V^\tau\partial_\tau$. 根据式(5), 可求得一个有用的公式为

$$\Psi=i_\tau\mu=V^\tau i_{\partial_\tau}\mu=V^\tau\mu_\tau. \tag{8}$$

现对上式任意 3-形式 $\Lambda^3(R^4)$ 和式(10)的两边作外微分运算. 借助于式(6), (7), 不难求得[9~11]

$$\mathrm{d}\Psi = \mathrm{d}(V^{\tau}\mu_{\tau}) = (\partial_{\tau}V^{\tau})\mu, \tag{9}$$

利用缩并 $i_{\partial_\tau}\mu_{\tau} = \mu_{\upsilon\tau}$, 则可求得 2-形式 $\Lambda^2(R^4)$ 的基为

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_{01} = -\mathrm{d}x^2\Lambda\mathrm{d}x^3 = -\mu_{10}, & \mu_{02} = \mathrm{d}x^1\Lambda\mathrm{d}x^3 = -\mu_{20}, \\ \mu_{03} = -\mathrm{d}x^1\Lambda\mathrm{d}x^2 = -\mu_{30}, & \mu_{12} = -\mathrm{d}x^0\Lambda\mathrm{d}x^3 = -\mu_{21}, \\ \mu_{13} = \mathrm{d}x^0\Lambda\mathrm{d}x^2 = -\mu_{31}, & \mu_{23} = -\mathrm{d}x^0\Lambda\mathrm{d}x^1 = -\mu_{32}. \end{array}\right\} \tag{10}$$

可见, R^4 上 2-形式的基共有 6 个. 用式(12)中的 6 个基, 对于任意 2-形式 $\omega\in\Lambda^2(R^4)$, 则可将它写成

$$\omega = \sum_{\upsilon,\tau}\omega^{\upsilon\tau}\mu_{\upsilon\tau}/2, \quad \omega^{\upsilon\tau} = -\omega^{\upsilon\tau}, \quad \upsilon,\tau = 0, 1, 2, 3, \tag{11}$$

式中, 重复指标 υ 和 τ 为哑标, 是反对称的. 可利用爱因斯坦约定, 将式(11)简写为

$$\omega = \omega^{\upsilon\tau}\mu_{\upsilon\tau}/2, \quad \upsilon,\tau = 0, 1, 2, 3. \tag{12}$$

由式(11)可知, 任意 2-形式 $\omega\in\Lambda^2(R^4)$ 具有 6 个项, 且又是反对称的. 因此可用它表示 Minkowski 时空坐标系中的二阶反对称张量. 如前已述及电磁场量 $\boldsymbol{D}\sim\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}$ 分别可用二阶反对称张量 $\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau}$ 和 $\boldsymbol{F}^{\upsilon\tau}$ 描述. 因而现在便可用形如 2-形式 $\Lambda^2(R^4)$ 的表示式(11)或式(12)表达.

现对任意 2-形式式(12)的两边作外微分运算, 借助式(7)和(10), 不难求得[0~16]

$$\mathrm{d}\omega = (\partial_{\upsilon}\omega^{\upsilon\tau})\mu, \quad \upsilon,\tau = 0, 1, 2, 3. \tag{13}$$

3　由电荷守恒定律导出麦克斯韦电磁场方程组

3.1　缩并 $i_g\mu$ 封闭的充要条件

利用公式(8)求电流向量场 $\boldsymbol{g}$(如式(4))与 4-形式 μ(如式(6))的缩并, 可得 3-形式为

$$i_g\mu = \boldsymbol{J}^{\tau}i_{\partial_\tau}\mu = \boldsymbol{J}^{\tau}\mu_{\tau}, \tag{14}$$

再利用式(9), 对式(14)作外微分运算, 得

$$\mathrm{d}(i_g\mu) = \mathrm{d}(\boldsymbol{J}^{\tau}\mu_{\tau}) = (\partial_0\rho + \partial_1 J^1 + \partial_2 J^2 + \partial_3 J^3) =$$
$$(\partial_t\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{J})\mu = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}\right)\mu. \tag{15}$$

显然, 从式(14)可知, 当且仅当

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0, \tag{16}$$

则有 $\mathrm{d}(i_g\mu) = 0$, 这时 3-形式 $i_g\mu$ 封闭. 换句话说, 满足式(16)是 3-形式 $i_g\mu$ 封闭的充要条件. 然而, 式(16)正是电荷运动的基本规律——电荷守恒定律. 可见, 只有以存在电荷守恒定律为前提, 方可导致 $i_g\mu$ 封闭.

3.2　Poincare 定理

若 ω 为流形 M 上的 p-形式, 对于它存在一个$(p-1)$形式 β. 那么, 当 $\mathrm{d}\beta = \omega$ 时, 则有 $\mathrm{d}\omega = 0$. 其逆定理则指出, 若 ω 是一个在开集 $U\subset M$ 上的 p 形式. 那么, 当 $\mathrm{d}\omega = 0$ 时, 则必存在一个$(p-1)$-形式 β, 满足 $\omega = \mathrm{d}\beta$[6~8].

正如节 3.1 证明过和强调过的那样, 当且仅当电荷守恒定律存在时, 方可导致缩并 $i_g\mu$ 封

闭, $\mathrm{d}(i_g\mu)=0$. 于是, 根据 Poincare 逆定理, 可直接得到

$$i_g\mu = \mathrm{d}H. \tag{17}$$

这时缩并 $i_g\mu$ 被称为具有恰当形式, 式中微分形式 H 比 $i_g\mu$ 的次低一次. 因为 $i_g\mu$ 是 3 形式, 于是 H 必为 2-形式.

3.3 论证结果

既然 H 为 2-形式, 而在 Minkowski 时空坐标系中, 2-形式必须表达如式(11) 或式(12), 即可得

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau}\mu_{\upsilon\tau}, \quad \upsilon, \tau = 0, 1, 2, 3. \tag{18}$$

同时, 依照(13) 式, 2-形式 H 必须满足恒等式

$$\mathrm{d}H = (\partial\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau})\mu_\tau, \quad \upsilon, \tau = 0, 1, 2, 3. \tag{19}$$

从式(14) 和式(17) 可得到

$$\mathrm{d}H = \boldsymbol{J}^\tau\mu_\tau. \tag{20}$$

将式(20) 同式(19) 相比较, 最后求得

$$\partial\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau} = \boldsymbol{J}^\tau, \quad \upsilon, \tau = 0, 1, 2, 3. \tag{21}$$

对于无磁荷、无磁流的现实共认的状态下, 同理可和

$$\partial\boldsymbol{F}^{\upsilon\tau} = 0, \quad \upsilon, \tau = 0, 1, 2, 3. \tag{22}$$

式(21) 和(22) 正是麦克斯韦电磁场方程组的缩写式. 式中 $\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau}$和 $\boldsymbol{F}^{\upsilon\tau}$正是描述电磁场 $\boldsymbol{D}\sim\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}$ 的二阶反对称张量, 它们的组元有其相应的矩阵(3) 表达. 于是, 最终论证了由电荷守恒定律($\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J})=0$ 导出麦克斯韦电磁场方程组

$$\partial\boldsymbol{H}^{\upsilon\tau} = \boldsymbol{J}^\tau, \quad \partial\boldsymbol{F}^{\upsilon\tau} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho, \\ \nabla\times\boldsymbol{H} - \partial\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla\times\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{B} = 0, \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\upsilon, \tau = 0, 1, 2, 3).$$

4 结论

至此, 已论证了电荷的运动规律可确定电磁场的运动规律, 也就是电磁场运动规律的本原来自于场源电荷的运动规律. 这一结论在认识论上、学术上、理论上的意义和价值是无可非议的. 其次, 从论证引用的数学手段表明: 唯有凭借统一的现代数学的几何方法, 我们的论证才得以奏效. “几何式”的探讨方法优越于分析方法的表述, 超越于分析方法所能获得的描述结果.

参 考 文 献

1 陈强顺. 分析力学导论[M]. 上海: 同济大学出版社, 1997. 72～76

2 陈强顺. 物理规律的本原问题[J]. 数学、物理、力学、高技术研究进展, 1998, 7: 197～198
3 陈强顺, 冯承天. 电荷守恒定律可确定麦克斯韦方程组的数学形式[J]. 同济大学学报, 1989, 17(7): 395～400
4 Chen Qiangshun. The mathematical connection from the conservation law of electric charge to Mexwell's equations[J]. J. N. S. of Heilongjiang Univ., 1993, 10 (Special): 33～38
5 Von Westenholz C. Differential forms in mathematical physics[M]. Amsterdam: North-Holl, 1981. 168～174
6 Schutz B F. Geometrical methods of mathemetical physics[M]. London: Cambridge Univ. Press, 1980. 113～160
7 Curtis W D, Miller F R. Differential manifolds and theoretical physiscs[M]. New York: Acadmic Press, 1985. 141～190
8 Burke W L. Applied differential geometry[M]. London: Cambridge Univ. Press, 1985. 153～154
9 Edelen D G B. Applied exterior calculus[M]. New York: John Wiley & Sons, 1985. 361～369
10 Corwin L F, Szczarba R H. Multivariable calculus[M]. New York: Marcel Dekker, 1982. 381～401
11 Choquet-Bruhat Y, Dewitt-Morette C. Analysis manifolds and physics[M]. Amsterdam: North-Holland, 1982. 1～182
12 陈强顺. 麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式[J]. 物理, 1988, 17(8): 468～473
13 陈强顺, 王建成. 微分形式论与外微分应用于电动力学的探讨[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1992, 13(4): 468～475
14 陈强顺, 王建成. 霍奇星算子、余微分及拉-贝算子与二阶电磁场方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1995, 16(3): 258～263
15 陈强顺. 微分形式与外微分在电磁场中的应用[J]. 扬州师院学报(自然科学版), 1986, 10(3): 54～63

Characteristics of Motion of Electromagnetic Field Can Be Determined by Applying Characteristics of Motion of Electric Charge

Chen Qiangshun① Wang Jiancheng②

(① Dept. of Phys., Tongji Univ., 200092, Shanghai;

② College of Info. Sci. & Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Characteristics of motion of electromagnetic field can be determined by characteristics of motion of electric charge. In other word, characteristics of motion of electric charge can determine characteristics of motion of electromagnetic field. The above conclusion is demonstrated in the light of poincare theorem, it is demonstrated by using contraction (interior product) of vector field and differential form as well as operation of exterior differentiation.

Keywords differential form, exterior differentiation, contraction (interior product), poincare theorem