

文章编号 1000-5013(2001)03-0272-06

变刚度薄壁杆件的动力稳定性

罗 漪 王全凤

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 采用有限单元法, 研究无阻尼条件下受轴向周期性动力荷载作用的变刚度薄壁杆件动力稳定问题. 承受轴向周期性变化外荷载的薄壁杆件, 其非线性几何刚度矩阵随着轴向外荷载的变化而改变. 因此, 所研究的问题在本质上为变刚度薄壁杆件的动力稳定性问题. 用有限单元离散变刚度薄壁杆件, 通过公式变换, 将无阻尼条件下变刚度薄壁杆件的振动方程转化为 Mathieu 方程. 应用 Matlab 程序设计语言编制程序, 确定在轴向周期性动力荷载作用下, 变刚度薄壁杆件可能发生的相应于弯曲振动、扭转与翘曲耦合振动的动力不稳定区域, 并给出相应的结论.

关键词 动力稳定, 变刚度, 薄壁杆件, 有限单元法, 参数振动

中图分类号 TU 378.701; TU 311.3

文献标识码 A

薄壁结构在实际工程中应用广泛. 从工程观点考虑, 任何薄壁结构首先必须保证稳定性(指平衡状态或稳态运动在扰动作用下的稳定性问题), 然后才有可能讨论其在稳定的工作状态下的振动特性. 结构的动力稳定是结构动力学设计的3个指标之一^[1]. 研究薄壁结构在动力荷载作用下的稳定与静力稳定相比更具有普遍性. 文献[2]采用加权余量法和5次B样条函数法, 文献[3]应用差分法及自振振型变换法, 将运动的薄壁杆件偏微分方程转化为 Mathieu 方程. 本文应采用有限单元法离散薄壁结构, 能够求解截面形式是线性变化的、非线性变化的或者完全不规则的随机变化的薄壁杆件的动力稳定问题, 思路清晰、精度可靠.

1 基本假定与物理模型

1.1 基本假定

本文作如下假定: (1) 材料符合虎克定律; (2) 不考虑纵向惯性力的影响; (3) 不考虑由于变刚度薄壁杆件的横断面绕其本身主轴旋转而产生的惯性力.

1.2 物理模型

在薄壁杆件上施加一轴向周期性变化的动力荷载. 若荷载的振幅小于动力稳定临界值, 则杆件会发生纵向振动, 振动的振幅很小, 具有外力的频率. 但是, 当扰动频率 θ 与薄壁杆件的横向固有振动频率 ω 之间的比值为某一定值时, 薄壁杆件的直线形式将变为动力不稳定的. 即发生横向参数振动, 振幅迅速地增加到很大的数值. 承受着轴向周期性变化外荷载的薄壁杆件

的刚度, 是周期性变化的. 线性应变刚度矩阵是固定的, 而非线性几何刚度矩阵随着轴向外荷载的变化而改变^[1]. 所研究的问题, 本质上为变刚度薄壁杆件的动力稳定性问题.

2 数学模型

用有限单元法离散无阻尼变刚度薄壁杆件, 研究其在轴向周期性荷载作用下的动力稳定性. 薄壁杆件振动的矩阵形式用达朗贝尔原理表示, 即

$$M\ddot{x} + K\dot{x} = 0, \quad (1)$$

其中 M 为整体质量矩阵, K 为整体刚度矩阵. 令所受轴向周期性荷载 $P = P_0 + P_1 \cos \theta t$. 式中, θ 为外加周期性荷载的扰动频率. 将外加荷载的静力分量 P_0 和动力振幅分量 P_1 分别表示成薄壁杆件静力屈曲极限荷载 P^* 的函数, $P = \alpha P^* + \beta P^* \cos \theta t$. 其中, α 为 $0 \sim 1$ 之间的数, β 为 $0 \sim 2$ 之间的数.

以外加轴向周期性荷载, 实时修正式(1)中薄壁杆件的非线性几何刚度矩阵, 得变刚度薄壁杆件的振动方程为

$$M\ddot{x} + [K_e - (\alpha P^* + \beta P^* \cos \theta t) K_G] x = 0. \quad (2)$$

式(2)是周期性变系数二阶微分方程式. 式中 K_e 为线性应变刚度矩阵, K_G 为非线性几何刚度矩阵. 令 I 表示单位矩阵(下同), 变换式(2)的形式, 即

$$\ddot{x} + M^{-1} [K_e - (\alpha P^* + \beta P^* \cos \theta t) K_G] x = 0,$$

$$\ddot{x} + M^{-1} (K_e - \alpha P^* K_G) [I - 2 \cdot (2K_e - 2\alpha P^* K_G)^{-1} \cdot \beta P^* K_G \cdot \cos \theta t] x = 0.$$

令 $M^{-1} (K_e - \alpha P^* K_G) = \Omega^2$, $(2K_e - 2\alpha P^* K_G)^{-1} \cdot \beta P^* K_G = \mu$ 式(1)最终可以化为一个带有周期性系数的二阶微分方程 Mathieu 方程的形式, 即

$$\ddot{x} + \Omega^2 (I - 2\mu \cos \theta t) x = 0. \quad (3)$$

Mathieu 方程为具有周期 $T = 2\pi/\theta$, $2T = 4\pi/\theta$ 的周期函数. 当 t 增加到一个周期 T 或 $2T$ 时, 式(3)的形式不变. 按形式

$$x_i(t) = \sum_{k=1,3,5} \left[a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right], \quad (4)$$

寻求周期为 $2T$ 的周期解. 将级数(4)代入式(3)中, 且令 $\sin(k\theta/2)$ 及 $\cos(k\theta/2)$ 的同类项系数相等, 可得到关于 a_k 及 b_k 的线性齐次代数方程组. 即

$$\begin{cases} \left[I + \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \right] a_1 - \mu a_3 = 0, & \left[I - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2} \right] a_k - \mu (a_{k-2} + a_{k+2}) = 0, \\ \left[I - \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \right] b_1 - \mu b_3 = 0, & \left[I - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2} \right] b_k - \mu (b_{k-2} + b_{k+2}) = 0, \end{cases}$$

式中, $k = 3, 5, 7, \dots$ 对于 Mathieu 方程(3), 周期解的存在条件是使得齐次方程组的行列式等于零. 将带 \pm 符号的两个条件联合起来, 得

$$\begin{vmatrix} I \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 \\ -\mu & I - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & I - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

式(5)包含外荷载频率、薄壁杆件的固有频率和纵向力数值. 从式(5)可找出由周期 $2T$ 的周期解所包围的不稳定区域. 用类似方法, 可得到由周期 T 的周期解所包围的不稳定区域. 将级数

$$x_i(t) = b_{i0} + \sum_{k=2,4,6} \left(a_{ik} \sin \frac{k\theta}{2} + b_{ik} \cos \frac{k\theta}{2} \right) \quad (6)$$

代入式(5)中, 可得到代数方程组为

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \right) a_2 - \mu a_4 &= 0, & \left(I - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2} \right) a_k - \mu (a_{k-2} + a_{k+2}) &= 0, \\ b_0 I - \mu b_2 &= 0, & \left(I - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \right) b^2 - \mu (2b_0 + b_4) &= 0, \\ \left(I - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2} \right) b_k - \mu (b_{k-2} + b_{k+2}) &= 0, & k &= 4, 6, 8, \dots \end{aligned}$$

令这一齐次方程组的行列式等于零, 可得到临界频率方程式为

$$\begin{vmatrix} I - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 \\ -\mu & I - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & I - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} \\ & & \vdots \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} I & -\mu & 0 & 0 \\ -2\mu & I - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 \\ 0 & -\mu & I - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & 0 & -\mu & I - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} \\ & & \vdots \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

由式(7), (8)可求得变刚度薄壁杆件的动力不稳定区域.

3 开口截面薄壁杆件的动力不稳定区域

3.1 算例

截面形式为工字形截面, 约束条件为两端简支. 图1为截面几何尺寸(mm). 其结构的长度 $L = 2$ m, $E = 0.201$ TPa, 剪切模量 $G = 80$ TPa, 泊松比 $\nu = 0.25$. 薄壁有限单元选取文[5]推导的 14×14 非线性薄壁开口截面有限单元. 除去轴向变形部分, 同时考虑相应于变刚度薄壁杆件的双向弯曲、扭转和翘曲耦合变

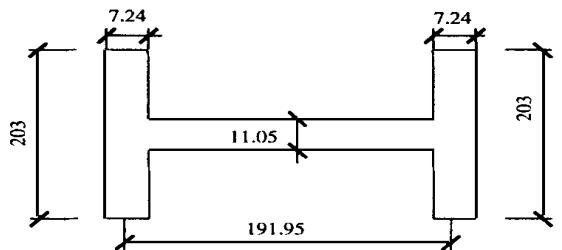


图1 工字形截面

形的振动形式. 变刚度薄壁杆件的第1, 2, 3动力不稳定区域, 如表1所示.

表 1 变刚度薄壁杆件的动力不稳定区域边界

序 号	$\frac{\theta}{2\Omega}$	α	β					
			0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
第 1 上边界	文 6 解	0	1.000 0	1.038 9	1.085 1	1.129 4	1.172 1	1.213 2
	文献 2]	0	1.000 0	1.048 8	1.095 4	1.140 2	1.183 2	1.224 7
	本文解	0	1.000 0	1.049 3	1.097 3	1.143 9	1.189 0	1.232 9
	文 6 解	0.5	1.000 0	0.894 4	0.774 6	0.632 5	—	—
	本文解	0.5	1.000 0	0.898 0	0.797 7	0.733 8	—	—
	文 6 解	0.9	1.000 0	0.707 1	—	—	—	—
	本文解	0.9	1.000 0	0.709 2	—	—	—	—
第 1 下边界	文 6 解	0	1.000 0	0.0939 7	0.886 0	0.828 8	0.767 3	0.700 4
	文 6 解	0	1.000 0	0.948 7	0.894 4	0.836 7	0.774 6	0.707 1
	本文解	0	1.000 0	0.949 4	0.898 0	0.846 7	0.797 7	0.755 9
	文 6 解	0.5	1.000 0	1.095 4	1.183 2	1.264 9	—	—
	本文解	0.5	1.000 0	1.097 3	1.189 0	1.275 5	—	—
	文 6 解	0.9	1.000 0	1.414 2	—	—	—	—
	本文解	0.9	1.000 0	1.405 9	1.712 1	—	—	—
第 2 上边界	文 6 解	0	0.500 0	0.500 8	0.503 3	0.507 4	0.513 2	0.520 4
	本文解	0	0.500 0	0.500 8	0.503 3	0.507 5	0.513 2	0.520 6
	文 6 解	0.5	0.500 0	0.479 6	0.412 3	0.264 6	—	—
	本文解	0.5	0.500 0	0.483 0	0.428 2	0.316 2	—	—
	文 6 解	0.9	0.500 0	0.353 6	—	—	—	—
	本文解	0.9	0.500 0	0.381 9	—	—	—	—
第 2 下边界	文 6 解	0	0.500 0	0.495 0	0.479 6	0.452 8	0.412 3	0.353 6
	本文解	0	0.500 0	0.495 8	0.483 0	0.461 0	0.428 2	0.381 9
	文 6 解	0.5	0.500 0	0.503 3	0.513 2	0.529 2	—	—
	本文解	0.5	0.500 0	0.503 3	0.513 2	0.529 6	—	—
	文 6 解	0.9	0.500 0	0.577 4	—	—	—	—
	本文解	0.9	0.500 0	0.520 6	—	—	—	—
第 3 上边界	文 6 解	0	0.333 3	0.331 8	0.322 1	0.297 3	0.247 9	0.145 3
	本文解	0	0.333 3	0.332 6	0.331 0	0.329 1	0.327 6	0.326 7
	文 6 解	0.5	0.333 3	0.315 4	—	—	—	—
	本文解	0.5	0.333 3	0.331 0	0.327 6	—	—	—
	文 6 解	0.9	0.333 3	—	—	—	—	—
	本文解	0.9	0.333 3	0.326 7	—	—	—	—
第 3 下边界	文 6 解	0	0.333 3	0.331 4	0.315 4	0.255 5	—	—
	本文解	0	0.333 3	0.332 2	0.327 4	0.315 8	0.291 1	0.235 2
	文 6 解	0.5	0.333 3	0.322 1	0.247 9	—	—	—
	本文解	0.5	0.333 3	0.327 4	0.291 1	—	—	—
	文 6 解	0.9	0.333 3	—	—	—	—	—
	本文解	0.9	0.333 3	0.235 2	—	—	—	—

3.2 算例分析

薄壁杆件动力不稳定的表现形式,称为参数振动^[7].表1表明了外加荷载的参数与薄壁杆件的固有参数之间的关系.若外加扰动频率与薄壁杆件自振频率的比值,与动力荷载激发系数的参数组合落在动力不稳定区域内时,表示变刚度薄壁杆件的任何初偏移将随着时间而无限增长,是动力不稳定的.反之,则意味着薄壁杆件是动力稳定的.由表可知,变刚度薄壁杆件的动力稳定区域比动力不稳定区域大得多,且动力不稳定区域的宽度是按第1,2,3动力不稳定区域的顺序迅速地减小的.具有最大宽度的为主要不稳定区域.对于同一动力不稳定区域,随着外加荷载动力振幅分量的增加,动力荷载激发系数也增加.薄壁杆件的动力不稳定区域变宽了,说明当外加荷载的动力振幅分量比较大时,薄壁杆件更容易发生参数激发振动导致的失稳破坏.

程序计算得到的数据表明,变刚度薄壁杆件的动力不稳定区域上边界和下边界随着 α 的增大而有规律地微小变化.动力不稳定区域随着 α 的增加而变宽.当外加荷载的静力分量增加时,薄壁杆件的刚度随之变化.线性应变刚度矩阵保持不变.非线性几何刚度矩阵在减小.外加荷载的静力分量愈接近薄壁杆件静力屈曲临界荷载,愈容易发生横向的动力失稳.当薄壁杆件上作用的动力荷载的动力部分幅值为0($\beta=0, \mu=0$)时,外加荷载的扰动频率不起作用.此时,将表1中相应的点看成是处在静力与动力的临界状态.

引起薄壁杆件动力不稳定的频率,可以为 $1.000\ 0 \times 2$ 倍、 $0.500\ 0 \times 2$ 倍和 $0.333\ 3 \times 2$ 倍的薄壁杆件振动频率.说明在外荷载的频率小于、等于和大于结构的主要共振频率时,薄壁杆件都有可能动力不稳定,发生参数共振.这与薄壁杆件的强迫共振是不同的.薄壁杆件强迫振动的共振,一般在结构的固有频率与激发频率相重合时发生.由此可知,防止薄壁杆件动力不稳定的发生,比防止薄壁杆件共振的发生更复杂.

4 结束语

本文采用有限单元法,求得了变刚度薄壁杆件动力不稳定的临界情况的共性.同时,求得任意尺寸的薄壁杆件动力不稳定发生时,外荷载频率、外荷载的静力分量和动力振幅分量.本文的动力不稳定区域采用了比值的方法——力的比值和频率的比值来求解.薄壁杆件的截面尺寸、长度和两端的约束条件等自身性质的改变,不会影响动力不稳定区域图的形状.本文还对薄壁杆件的共振与动力不稳定的参数振动进行了分析.比较结果说明,参数振动与结构的共振虽然表现形式有相似之处,却是完全不同的两种振动形式.

本文提出用有限单元法来解动力稳定问题,是解决变截面薄壁杆件的有效方法.经典的Bolotin方法无法求解任意变截面的薄壁杆件,只能求解特定的变截面薄壁杆件.它同样用的是数值近似方法,但求解过程繁复.有限单元法能够求解截面形式是线性变化的、非线性变化的,或者是完全不规则的、随机变化的薄壁杆件动力稳定问题.其思路清晰、精度可靠.只需调整动力稳定区域求解程序中的有限单元模块,改动其中的单元离散化部分即可.求解过程中,薄壁杆件的静力屈曲极限荷载、自振频率和薄壁杆件,在纵向力的定值分量作用下的振动频率可同时求得.另外,若要考虑薄壁杆件不同的静力屈曲形式、相应的动力振动形式,变换其中的薄壁单元模块即可.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

尽管薄壁杆件理论、有限单元法都已经是非常成熟的理论,而且结构的动力稳定性也有许

多人研究过. 但是, 研究薄壁杆件的动力稳定性并不多见, 给出定量的稳定性分析数据更为少见. 用有限单元法来研究无阻尼条件下, 变刚度薄壁杆件的动力稳定性更是一种新的尝试. 希望本文的结果, 能为薄壁杆件的动力稳定性理论, 提供一些有益的资料, 有助于薄壁结构的动力分析与设计.

参 考 文 献

- 1 张阿舟, 诸德超, 姚起杭等. 实用振动工程[M]. 北京: 航空工业出版社, 1996. 321 ~ 322
- 2 杨 平, 孙 兰. 偏心周期荷载作用下闭口薄壁构件的动力稳定性[J]. 武汉交通科技大学学报, 1998, 22(4): 403 ~ 407
- 3 童乐为, 周国梁. 偏心周期荷载作用下薄壁构件的动力稳定性[J]. 上海力学, 1992, 13(4): 41 ~ 48
- 4 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998. 380 ~ 386
- 5 Kiipornchai S, Chan S L. Finite element analysis of thin-walled structures-stability and non-linear finite element analysis of thin-walled structures[M]. London: Elsevier Applied Science, 1998. 89 ~ 130
- 6 Bolotin V V. The dynamic stability of elastic systems[M]. San-Francisco: Holden-Day, INC., 1964. 291 ~ 304
- 7 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998. 380 ~ 382

Dynamic Stability of Thin-Walled Member with Variable Rigidity

Luo Yi Wang Quanfeng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The dynamic stability of thin-walled member with variable rigidity is studied under the condition of no damp and the action of axially and periodically dynamic load. It is studied by adopting finite element method. The thin-walled member subjects to axially periodically changed external load, its nonlinearly geometric rigidity matrix changes with the change of axially external load. Thus the problem studied here is essentially the dynamic stability of thin-walled member with variable rigidity. The thin-walled member with variable rigidity is dispersed by finite element method; and its vibration equation under undamped condition is transformed into Mathieu equation by formula transformation. By applying Matlab programming language, a program is developed for determining regions of dynamic instability which may occur in thin-walled member with variable rigidity under the action of axially periodically dynamic load relevant to flexural vibrations, torsion, and warping and coupling vibration. The corresponding conclusions are given finally.

Keywords dynamic stability, variable rigidity, thin-walled member, finite element method, parametric vibration