第22卷 第3期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.22 No.3
2001年7月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul.2001

文章编号 1000-5013(2001)03-0242-05

# 关于 Lucas 猜想的推广形式

王 云 葵

(广西民族学院数学与计算机科学系, 南宁 530006)

摘要 利用初等数论方法, 证明了丢番图方程 $x(x+1)(2x+1)=2py^2$ 在素数 $p\not\equiv 1 \pmod 8$ 时, 仅有正整数解 $(p, x, y)=(3, 1, 1), (3, 24, 70), (11, 49, 105)$. 从而, 获得了 Lucas 猜想的简洁初等证明. 同时, 基本解决了丢番图方程 $x(x+1)(2x+1)=Dy^n$ 的求解问题.

关键词 丢番图方程, Lucas 猜想, 正整数解

中图分类号 O 156.7　　文献标识码 A

1875 年, Lucas 猜想[1]了丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1)=6y^2 \tag{1}$$

仅有正整数解 $(x, y)=(1, 1), (24, 70)$. 1919 年, Watson[2]利用椭圆函数给出了证明. 1952 年, Ljunggren[3]利用二次域理论给出了证明. 1969 年, Mordell[4]指出 Watson 和 Ljunggren 的证明, 既复杂又非初等, 希望有人能给出初等证明. 1981 年, Guy[5]把 Mordell 征求的初等证明, 列为数论中尚未解决的难题. 1985 年, 徐肇玉和曹珍富[6]宣布找到了初等证明, 但未见发表其证明过程. 1985 年, 马德刚[7]给出了长达万余字的初等证明, 但仍不令人十分满意. 1990 年, 洪伯阳[8]征求 Lucas 猜想的简洁初等证明. 本文在文[9]的基础上, 进一步研究了 Lucas 猜想的推广形式. 从而, 获得了 Lucas 猜想的简洁初等证明.

## 1 Lucas 猜想的简洁初等证明

**引理 1**[4] $p$ 为奇素数, 则丢番图方程 $x^4-2py^2=1$ 仅有正整数解 $p=3, x=7, y=20$.

**引理 2**[10] 方程组 $x^2+(x+1)^2=z$, $y^2+(y+1)^2=z^2$, 仅有正整数解 $(x, y, z)=(1, 3, 5)$.

**引理 3**[11] Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 的无穷多组正整数解 $(x_n, y_n)$, 均满足 $x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n$, $x_1=3$, $x_2=17$, 或 $y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$, $y_1=2$, $y_2=12$.

**引理 4** $p$ 为奇素数, 则丢番图方程

$$p^2x^2-8y^2=1,\ p\not\equiv 1 \pmod 8 \tag{2}$$

仅有正整数解 $p=3$, $x=y=1$ 和 $p=11$, $x=3$, $y=35$.

证明 设式(2)有正整数解 $(x, y)$, 则 $(px^2+1)(px^2-1)=8y^2$. 因 $(px^2+1, px^2-1)=2$,

收稿日期 2000-11-08　　作者简介 王云葵(1966-), 男, 讲师

基金项目 广西民族学院重点科研基金资助项目

故式(2)给出式(3)或式(4).

$$px^2-1=4t^2,\ px^2+1=2s^2,\ y=ts,\ (t,s)=1, \tag{3}$$

$$px^2+1=4t^2,\ px^2-1=2s^2,\ y=ts,\ (t,s)=1. \tag{4}$$

因 $p\not\equiv 1(\bmod 8)$, 故由式(3)有 $2\mid t$ 且 $p\equiv 1(\bmod 8)$, 矛盾. 由式(4)推出式(5)或式(6).

$$s^2-2t^2=-1,\ 2t+1=x_1^2,\ 2t-1=px_2^2,\ x=x_1x_2, \tag{5}$$

$$s^2-2t^2=-1,\ 2t-1=x_1^2,\ 2t+1=px_2^2,\ x=x_1x_2. \tag{6}$$

因 $t$ 与 $s$ 必为奇数, 由式(5)的第 2 式有 $x_1^2=2t+1\equiv -1(\bmod 4)$, 矛盾. 方程组(6)显然有正整数解 $s=t=x_1=1$, 从而 $p=3, x_2=1$. 即方程(2)有正整数解 $p=3, x=y=1$. 若式(2)还有 $x>1$ 的正整数解 $(x,y)$, 则令 $x_1=2m+1,\ s=2n+1$. 代入式(6)的前两式, 得

$$m^2+(m+1)^2=t,\ n^2+(n+1)^2=t^2,\ m,n,t\geq 1. \tag{7}$$

由引理 2 知, 方程组(7)仅有正整数解 $(m,n,t)=(1,3,5)$, 代入式(6)得 $(p,x,y)=(11,3,35)$.

**定理 1**　$p$ 为奇素数, 则丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1)=2py^2,\ 即\ p\not\equiv 1(\bmod 8) \tag{8}$$

仅有正整数解 $(p,x,y)=(3,1,1),(3,24,70),(11,49,105)$.

证明　设方程(8)有正整数解 $(x,y)$. 因 $x(x+1)$ 与 $2x+1$ 互素, 并据文献[4]知 $x(x+1)=v^n(n\geq 2)$ 无正整数解, 故由方程(8)有式(9)或式(10).

$$2x+1=u^2,\ x(x+1)=2pv^2,\ y=uv,\ (u,v)=1, \tag{9}$$

$$2x+1=pu^2,\ x(x+1)=2v^2,\ y=uv,\ (u,v)=1. \tag{10}$$

由式(9)有 $u^4-2p(2v)^2=1$, 据引理 1 仅有正整数解 $(p,u,v)=(3,7,10)$. 从而, 此时仅有解 $(p,x,y)=(3,24,70)$. 由式(10)有 $p^2u^4-8v^2=1$.

因 $p\not\equiv 1(\bmod 8)$, 由引理 4 仅有正整数解 $(p,u,v)=(3,1,1),\ (11,3,35)$. 故这时方程(8)仅有解 $(p,x,y)=(3,1,1),(11,49,105)$.

**定理 2**　$p$ 为奇素数, 则丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1)=2py^2,\ p\equiv 1(\bmod 8) \tag{11}$$

的正整数解为 $(p,x_n,y_n)=(p,8t_n^2,2u_nt_ns_n)$. 其中正整数 $p,u,t,s$ 满足

$$s_{n+2}=6s_{n+1}-s_n,\ s_1=3,\ s_2=17, \tag{12}$$

$$t_{n+2}=6t_{n+1}-t_n,\ t_1=1,\ t_2=6, \tag{13}$$

$$pu_n^2=16t_n^2+1,\ p\equiv 1(\bmod 8). \tag{14}$$

证明　设式(11)有正整数解 $(x,y)$, 则类似于定理 1, 必有

$$pu^2=2x+1,\ x(x+1)=2v^2,\ y=uv,\ (u,v)=1. \tag{15}$$

因 $p\equiv 1(\bmod 8)$, 故有 $2\mid x$. 由式(15)的第二式有

$$x+1=s^2,\ x=2r^2,\ v=rs,\ (r,s)=1, \tag{16}$$

故有 $s^2-2r^2=1$, 从而 $2\mid r$. 令 $r=2t$. 则有

$$pu^2=16t^2+1,\ s^2-8t^2=1,\ (s,t)=1. \tag{17}$$

由引理 3 可知, $p,u,s,t$ 满足式(12)～(14). 顺便指出, 定理 1 实际上给出了 Lucas 猜想的简洁初等证明, 而由定理 2 易得 $p\equiv 1(\bmod 8)$ 的解 $(p,x,y)=(17,8,6),(577,288,204),(665\,857,332\,928,235\,416)$. 我们猜想必存在无穷多个素数 $p$, 使得方程(11)有正整数解.

## 2 Lucas 猜想的推广形式

引理 5[2] 丢番图方程(18)～(21),它们均无正整数解. 即

$$x(x+1)=y^n,\ x\geq 1,\ y\geq 1,\ n\geq 2, \tag{18}$$

$$x(x+1)=2y^n,\ x>1,\ y>1,\ n\geq 3, \tag{19}$$

$$x^3-Dy^3=\pm 1,\ D=4,8,16, \tag{20}$$

$$x^5-Dy^5=\pm 1,\ D=4,8,16. \tag{21}$$

引理 6[4] $n\geq 5$,则丢番图方程(22),最多有一组正整数解$(x,y)$.

$$\left|x^n-Dy^n\right|=1,\ D=4,8,16. \tag{22}$$

引理 7[4] 方程$x^4-py^2=1$($p$ 为素数) 仅有正整数解$(p,x,y)=(5,3,4),(29,99,1\,820)$.

定理 3 $p$ 为素数,则丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1)=y^n,\ n\geq 2, \tag{23}$$

$$x(x+1)(2x+1)=py^n,\ n\geq 2 \tag{24}$$

中,式(23)无正整数解,式(24)仅有正整数解$(n,p,x,y)=(2,5,4,6),(2,29,4\,900,90\,090)$.

证明 设式(23)有解$(x,y)$,因$(x(x+1),2x+1)=1$,故必有$x(x+1)=u^n$,$2x+1=v^n$,$y=uv$,$(u,v)=1$. 因$n\geq 2$,由引理 5 知$x(x+1)=u^n$ 无解,故式(23)无解. 设式(24)有正整数解$(x,y)$. 因$x(x+1)=v^n$ 无解,故必有

$$2x+1=u^n,x(x+1)=pv^n,y=uv,(u,v)=1. \tag{25}$$

当 $n=2$ 时,由式(25)得$u^4-4pv^2=1$,由引理 7 知仅有正整数解$(p,u,v)=(5,3,2),(29,99,910)$,故式(24)有正整数解$(n,p,x,y)=(2,5,4,6),(2,29,4\,900,90\,090)$. 当$n\geq 3$时,由式(25)有式(26)或式(27).

$$2x+1=u^n,x=s^n,x+1=pt^n,y=ust, \tag{26}$$

$$2x+1=u^n,x=pt^n,x+1=s^n,y=ust. \tag{27}$$

由此,推出$2x(2x+1)=2(us)^n$ 或$(2x+1)(2x+2)=2(us)^n$. 因$n\geq 3$,故由式(19)知这两个方程均无正整数解.

定理 4 $p$ 为奇素数,则丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1)=2py^n,\ x>1,n\geq 3, \tag{28}$$

在$n=3,5$ 及$n$ 为偶数时无正整数解,在$n>5$ 为奇数时至多有一组正整数解.

证明 设式(28)有正整数解$(x,y)$,则必有式(29)或式(30).

$$2x+1=pu^n,x(x+1)=2v^n,y=uv,(u,v)=1, \tag{29}$$

$$2x+1=u^n,x(x+1)=2pv^n,y=uv,(u,v)=1. \tag{30}$$

根据引理 5,式(29)的第二式无解. 当$n$ 为偶数时,由式(30)有$u^{2n}-8pv^n=1$,由引理 1 仅有正整数解$p=3,u^{\frac{n}{2}}=7,v^{\frac{n}{2}}=10$,但$\frac{n}{2}\geq 2$,显然不成立. 即当$n\geq 4$ 为偶数时,方程式(28)无解. 当$n$ 为奇数时,由式(30)有式(31)或式(32),(33),(34).

$$2x+1=u^n,x=s^n,x+1=2pt^n,y=ust, \tag{31}$$

$$2x+1=u^n,x=2pt^n,x+1=s^n,y=ust, \tag{32}$$



$$2x+1=u^n,x=2s^n,x+1=pt^n,y=ust, \tag{33}$$

$$2x+1=u^n,\ x=pt^n,\ x+1=2s^n,\ y=ust. \tag{34}$$

由式(31), (32)有 $2x(2x+1)=2(us)^n$ 或 $(2x+1)(2x+2)=2(us)^n$, 但由式(19)知此两方程均无正整数解; 由式(33), (34)有 $u^n-4s^n=\pm1$. 据引理 5 知, $u^3-4s^3=\pm1$, $u^5-4s^5=\pm1$ 均无正整数解, 故式(28)在 $n=3, 5$ 时均无正整数解. 当 $n>5$ 为奇数时, 由引理 6 知 $u^n-4s^n=\pm1$ 最多有一组正整数解, 故式(28)在 $n>5$ 时至多有一组正整数解.

**定理 5**　$p$ 为奇素数, 则丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1)=4py^n,\quad n\geq 2. \tag{35}$$

它在 $n$ 为偶数时, 仅有正整数解 $(n, p, x, y)=(2, 5, 4, 3)$, $(2, 29, 4\ 900, 45\ 045)$. 在 $n=3, 5$ 时, 无正整数解. 在 $n>5$ 为奇数时, 最多有一组正整数解.

证明　设式(35)有正整数解 $(x, y)$, 则有式(36)或式(37).

$$2x+1=u^n,\ x(x+1)=4pv^n,\ y=uv,\ (u, v)=1, \tag{36}$$

$$2x+1=pu^n,\ x(x+1)=4v^n,\ y=uv,\ (u, v)=1. \tag{37}$$

当 $n=2$ 时, 由定理 3 知仅有解 $(p, x, y)=(5, 4, 3)$ 和 $(29, 4\ 900, 45\ 045)$. 当 $n\geq4$ 为偶数时, 式(37)显然无解. 由式(36)有 $u^{2n}-16pv^n=1$, 据引理 7 知, 仅有解 $p=5$, $u^{\frac{n}{2}}=3$, $v^{\frac{n}{2}}=1$ 和 $p=29$, $u^{\frac{n}{2}}=99$, $v^{\frac{n}{2}}=455$, 显然无解. 当 $n\geq3$ 为奇数时, 由式(36), (37)有式(38)或式(39), (40), (41), (42)和(43).

$$2x+1=u^n,\ x=s^n,\ x+1=4pt^n,\ y=ust, \tag{38}$$

$$2x+1=u^n,\ x=4pt^n,\ x+1=s^n,\ y=ust, \tag{39}$$

$$2x+1=u^n,\ x=4s^n,\ x+1=pt^n,\ y=ust, \tag{40}$$

$$2x+1=u^n,\ x=pt^n,\ x+1=4s^n,\ y=ust, \tag{41}$$

$$2x+1=pu^n,\ x=4t^n,\ x+1=s^n,\ y=ust, \tag{42}$$

$$2x+1=pu^n,\ x=s^n,\ x+1=4t^n,\ y=ust. \tag{43}$$

由式(38), (39)有 $2x(2x+1)=2(us)^n$ 或 $(2x+1)(2x+2)=2(us)^n$, 显然无解. 由式(40)～(43)有 $u^n-8s^n=\pm1$ 或 $s^n-4t^n=\pm1$. 由引理 5 和引理 6 知, 这 4 个方程在 $n=3, 5$ 时均无正整数解, 在 $n>5$ 为奇数时最多有一组正整数解. 因此, 方程(35)在 $n=3, 5$ 时无解, 在 $n>5$ 为奇数时最多有一组正整数解.

**定理 6**　$p$ 为奇素数, 则丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1)=8py^n,\qquad n\geq 3, \tag{44}$$

在 $n=3, 5$ 及 $4|n$ 时无正整数解, 在 $n>5$ 时最多有一组正整数解.

证明　设式(44)有正整数解 $(x, y)$, 则有式(45)或式(46).

$$2x+1=u^n,\ x(x+1)=8pv^n,\ y=uv,\ (u, v)=1, \tag{45}$$

$$2x+1=pu^n,\ x(x+1)=8v^n,\ y=uv,\ (u, v)=1. \tag{46}$$

若 $4|n$, 由式(45)有 $u^{2n}-32pv^n=1$. 由引理 1 仅有解 $p=3$, $u^{\frac{n}{2}}=7$, $v^{\frac{n}{2}}=5$, 矛盾. 由(46)有式(47)或式(48).

$$x+1=s^n,\ x=8t^n,\ v=st,\ (s, t)=1, \tag{47}$$

$$x+1=8t^n,\ x=s^n,\ v=st,\ (s, t)=1. \tag{48}$$

因 $n=4m$, 式(47)有 $s^{4m}-8t^{4m}=1$, 无解; 由式(48)有 $s^{4m}=8t^{4m}-1\equiv-1 \pmod 8$, 矛盾. 故当 $4|$

$n$ 时, 方程(44) 无解; 若 $n\geq 3$ 时, 由式(45), (46) 有式(49) 或式(50), (51), (52), (53) 或(54).

$$2x+1=u^n,\ x=s^n,\ x+1=8pt^n,\ y=ust, \tag{49}$$

$$2x+1=u^n,\ x=8pt^n,\ x+1=s^n,\ y=ust, \tag{50}$$

$$2x+1=u^n,\ x=8s^n,\ x+1=pt^n,\ y=ust, \tag{51}$$

$$2x+1=u^n,\ x=pt^n,\ x+1=8s^n,\ y=ust, \tag{52}$$

$$2x+1=pu^n,\ x=8t^n,\ x+1=s^n,\ y=ust, \tag{53}$$

$$2x+1=pu^n,\ x=s^n,\ x+1=8t^n,\ y=ust. \tag{54}$$

由式(49), (50) 有 $2x(2x+1)=2(us)^n$ 或 $(2x+1)(2x+2)=2(us)^n$, 均无解; 由式(51)～(54) 有 $u^n-16s^n=\pm 1$ 或 $s^n-8t^n=\pm 1$. 由引理 5 知, 这 4 个方程在 $n=3, 5$ 时, 均无解; 在 $n>5$ 时, 最多有一组正整数解. 即方程(44) 在 $n=3, 5$ 时无正整数解, 在 $n>5$ 时最多有一组正整数解.

## 参 考 文 献


1 Lucas E. Problem 1 180[J]. Nour. Ann. Math., 1975, 4(2): 336～351

2 Watson C N. The problem of square pyramid[J]. Messnger of Math., 1919, (48): 1～22

3 Ljunggren W. New solution of a problem proposed by E. Lucas[J]. Norsk Mat. Tidskr., 1952, (34): 65～72

4 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1989. 303～331

5 Guy R K. Unsolved problems in number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1981. 25～31

6 徐肇玉, 曹珍富. 关于 Mordell 的一个问题[J]. 科学通报, 1985, 30(7): 558～559

7 马德刚. 方程 $6y^2=x(x+1)(2x+1)$ 的解的初等证明[J]. 四川大学学报, 1985, (4): 107～116

8 洪伯阳. 关于不定方程 $n(n+1)(2n+1)=6m^2$[J]. 数学通讯, 1990, (2): 36～38

9 王云葵, 罗华明. 关于路卡斯猜想的推广形式[J]. 柳州师范专科学校学报, 1999, 14(3): 93～95

10 Ljunggren W. Solution compete de equation du sixsiem degree a deux indeterminees[J]. Arch. Math. Naturv., 1946, 48(7): 26～29

11 王云葵, 侯李静. Pell 方程 $x^2-Dy^2=\pm 1$ 的通解公式[J]. 天中学刊, 2000, 15(5): 4～6

12 乐茂华. Gelond-Baker 方法在丢番图方程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998. 200～204


# Generation of Lucas Confecture


Wang Yunkui

(Dept. of Math. & Comput. Sci., Guangxi Univ., 530006, Nanning)



**Abstract** By using method of elementary number theory, the authovs prove that the diophantine equation $x(x+1)(2x+1)=2py^2$ has positive interger solutions $(p,x,y)=(3,1,1), (3,24,70)$ and $(11,49,105)$ only if the prime $p\neq 1 \pmod 8$, thus a concise elementary solution to lucas conjecture will be obtained; they also basically solve the diophantine equation $x(x+1)(2x+1)=Dy^2$.



**Keywords** diophantine equation, Lucas conjectare, pasitive intergerr solution