第22卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.22 No.3
2001年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul.2001

文章编号 1000-5013(2001)03-0237-05

具耗散项二阶双曲型方程分组显式方法

曾 文 平

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要 首先把具耗散项的二阶双曲型方程分解为两个一阶方程, 然后利用不对称公式提出解此类二阶双曲型方程的分组显式方法. 进而, 证明交替分组显式方法是无条件稳定的. 数值试验表明, 这些新方法是令人满意的.

关键词 二阶双曲型方程, 耗散项, 分组显式方法, 稳定性
中图分类号 O 241.82 文献标识码 A

文[1]提出了求解具耗散项的二阶双曲型方程混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \mathbf{R}\{0 \le x \le 1, t > 0\}, & (1) \\ u(x,0) = f_1(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x) \quad 0 \le x \le 1, & (2) \\ u(0,t) = g_1(t), \quad u(1,t) = g_2(t) \quad t > 0, & (3) \end{cases}$$

的一个古典显式格式[1](其中$a > 0$为常数)为

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\Delta t^2} + 2a\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} + f_m^n, \tag{4}$$

初边界条件从略. 并指出其一致收敛条件为$p = \tau/h \le 1$, 对时间步长的限制十分苛刻. 现在, 我们把文[2～3]提出的分组显式(GE)方法, 推广到解混合问题(1)～(3). 并讨论了它们的稳定性及截断误差, 指出交替分组显式方法是无条件稳定的. 数值例子表明, 这些格式是有效的、适用于并行计算, 是令人满意的.

1 新的处理方法

为此, 令新变量$v = v(x,t)$, 使得

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5}$$

方程(1)可改写为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2av = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{6}$$

收稿日期 2000-12-06 作者简介 曾文平(1940-), 男, 教授

具有初始条件 $u(x,0)=f_1(x)$, $v(x,0)=f_2(x)$ 及边界条件 $v(0,t)=g_1'(t)\stackrel{\Delta}{=}q_1(t)$, $v(1,t)=g_2'(t)\stackrel{\Delta}{=}q_2(t)$ 以及边界条件(3). 方程(6)现在“几乎是抛物型”的. 因此, 可把 Cay льев 非对称格式推广到方程(6). 在点$(m,n+\frac{1}{2})$处对方程(5), (6)建立如下差分格式

$$\frac{v_m^{n+1}+v_m^n}{2}=\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t},\tag{7}$$

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\Delta t}+a(v_m^{n+1}+v_m^n)=\frac{1}{\Delta x^2}(u_{m+1}^{n+1}-u_m^{n+1}-u_m^n+u_{m-1}^n)+\tilde{f}_m^n,\tag{8}$$

其中$\tilde{f}_m^n=f(x_m,t_{n+\frac{1}{2}})$. 而在点$(m+1,n+\frac{1}{2})$处对方程(5), (6)建立如下差分格式

$$\frac{v_{m+1}^{n+1}+v_{m+1}^n}{2}=\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^n}{\Delta t},\tag{9}$$

$$\frac{v_{m+1}^{n+1}-v_{m+1}^n}{\Delta t}+a(v_{m+1}^{n+1}+v_{m+1}^n)=\frac{1}{\Delta x^2}(u_m^{n+1}-u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^n+u_{m+2}^n)+\tilde{f}_{m+1}^n,\tag{10}$$

其中$\tilde{f}_{m+1}^n=f(x_{m+1},t_{n+\frac{1}{2}})$. 因 $a>0$, 若令 $\beta=1+a\Delta t$, 则 $\beta>1$. 由式(7), (8)可得

$$-p^2u_{m+1}^{n+1}+(2\beta+p^2)u_m^{n+1}=(2\beta-p^2)u_m^n+p^2u_{m-1}^n+2\Delta t v_m^n+\Delta t^2\tilde{f}_m^n,\tag{11}$$

其中$p=\Delta t/\Delta x$. 而由式(9), (10)可得

$$-p^2u_m^{n+1}+(2\beta+p^2)u_{m+1}^{n+1}=(2\beta-p^2)u_{m+1}^n+p^2u_{m+2}^n+2\Delta t v_{m+1}^n+\Delta t^2\tilde{f}_{m+1}^n.\tag{12}$$

从上述公式可得如下两个半显式格式. (1) RL 格式(从右往左的计算公式)为

$$u_m^{n+1}=\frac{1}{2\beta+p^2}\{p^2u_{m+1}^{n+1}+(2\beta-p^2)u_m^n+p^2u_{m-1}^n+2\Delta t v_m^n+\Delta t^2\tilde{f}_{m+1}^n\}.\tag{13}$$

(2) LR 格式(从左往右的计算公式)为

$$u_m^{n+1}=\frac{1}{2\beta+p^2}\{p^2u_{m-1}^{n+1}+(2\beta-p^2)u_m^n+p^2u_{m+1}^n+2\Delta t v_m^n+\Delta t^2\tilde{f}_m^n\}.\tag{14}$$

在此两种情况下, 解向量 $\boldsymbol{v}(v_1,v_2,\cdots,v_{M-1})^{\mathrm{T}}$. 按下述公式给出:

$$v_m^{n+1}=\frac{2}{\Delta t}(u_m^{n+1}-u_m^n)-v_m^n.\tag{15}$$

2 分组显式(GE)方法

除了上述半显式格式外, 如果按两点$(m,n+1)$及$(m+1,n+1)$一组地分别利用方程(11)和(12), 若令 $\Delta=4\beta(\beta+p^2)$, 则得到如下分组显式(GE)方法

$$\begin{pmatrix}u_m^{n+1}\\u_{m+1}^{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\begin{pmatrix}4\beta^2-p^4 & p^2(2\beta-p^2)\\p^2(2\beta-p^2) & 4\beta^2-p^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_m^n\\u_{m+1}^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p^2(2\beta+p^2)u_{m-1}^n+p^4u_{m+2}^n\\p^4u_{m-1}^n+p^2(2\beta+p^2)u_{m+2}^n\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.2\Delta t\begin{pmatrix}(2\beta+p^2)v_m^n+p^2v_{m+1}^n\\p^2v_m^n+(2\beta+p^2)v_{m+1}^n\end{pmatrix}+\Delta t^2\begin{pmatrix}(2\beta+p^2)\tilde{f}_m^n+p^2\tilde{f}_{m+1}^n\\p^2\tilde{f}_m^n+(2\beta+p^2)\tilde{f}_{m+1}^n\end{pmatrix}\right].\tag{16}$$

根据分点数 M 的奇偶性, GE 方法有不同形式. 有时, 在靠近边界的一点上的计算仍离不开单独使用非对称格式. 由式(14), (13)可分别给出如下计算公式. (1) 左不成组内点的公式为

$$\left.\begin{aligned}&u_1^{n+1}=\frac{1}{2\beta+p^2}\{p^2u_0^{n+1}+(2\beta-p^2)u_1^n+p^2u_2^n+2\Delta tv_1^n+\Delta t^2\tilde{f}_1^n\},\\&v_1^n=\frac{2}{\Delta t}(u_1^n-u_1^{n-1})-v_1^{n-1}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

(2) 右不成组内点的公式为

$$\left.\begin{aligned}&u_{M-1}^{n+1}=\frac{1}{2\beta+p^2}\{p^2u_M^{n+1}+(2\beta-p^2)u_{M-1}^n+p^2u_{M-2}^n+2\Delta tv_{M-1}^n+\Delta t^2\tilde{f}_M^n\},\\&v_{M-1}^n=\frac{2}{\Delta t}(u_{M-1}^n-u_{M-1}^{n-1})-v_{M-1}^{n-1}.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

(Ⅰ) 分点数 M 为偶数. 此时内点数 $M-1$ 是奇数, 有$\frac{M-2}{2}$个 GE 组及一个单点. 此单点或者是左单点, 或者是右单点. (1) GEL 方法. 它具有左单点, 除点$(1, n+1)$由公式(17)计算外, 从$(2, n+1)$到$(M-1, n+1)$连续使用$\frac{M-2}{2}$次成对使用 GE 格式(16). (2) GER 方法. 它具有右单点及$\frac{M-2}{2}$个 GE 组, 从$(1, n+1)$到$(M-2, n+1)$连续$\frac{M-2}{2}$次使用 GE 格式(16), 而右单点函数值则按公式(18)计算. (3) (S)AGE 方法. 在 $n+1$ 层按 GEL 格式计算, 在 $n+2$ 层按 GER 格式计算. (4) (D)AGE 方法, 即在不同时间层上, 按 DEL→GER→GER→GEL 格式顺序交替使用. 必须指出的是, 由于 ADE 格式所使用的半显式格式(13), (14)的局部截断误差均为$O\left(\Delta t^2+\Delta x^2+\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$, 但$\frac{\Delta t}{\Delta x}$项符号正好相反. 因此, 交替使用可使精度达到$O(\Delta t^2+\Delta x^2)$.

(Ⅱ) 分点数 M 是奇数. 此时 $M-1$ 是偶数, 又可分为两种情况. (1) GEU 方法. 除$\frac{M-3}{2}$个 GE 组使用公式(16)外, 它既有左单点又有右单点. (2) GEC 方法. 连续$\frac{M-1}{2}$次在成对点上使用式(16). 对应于奇数情形, 同样有(S)AGE 方法(即在不同时间层上交替使用 GEC 格式, GEU 格式)和(D)AGE 方法(即在不同时间层上, 按 GEC→GEU→GEU→GEC 格式顺序交替使用).

3 稳定性分析

3.1 ADE 格式(13)和(14)

半显式格式(13), (14)分别可写为矩阵形式. 即

$$(2\beta I+p^2\overline{G})\boldsymbol{u}^{n+1}=(2\beta I-p^2\overline{G}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}^n+2\Delta t\boldsymbol{v}^n+\Delta t^2\tilde{\boldsymbol{f}}^n+\boldsymbol{b}_1^n,\tag{19}$$

$$(2\beta I+p^2\overline{G}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}^{n+1}=(2\beta I-p^2\overline{G})\boldsymbol{u}^n+2\Delta t\boldsymbol{v}^n+\Delta t^2\tilde{\boldsymbol{f}}^n+\boldsymbol{b}_2^n,\tag{20}$$

其中

$$\overline{G}=\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\&1&-1&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&-1\\&&&&&1\end{bmatrix}.$$

由文[]可知,半显式格式(13)的传播矩阵为 $\Gamma_{SE(13)}=(2\beta\boldsymbol{I}+p^2\overline{\boldsymbol{G}})^{-1}(2\beta\boldsymbol{I}-p^2\overline{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}})$. 于是,有

$$\|\Gamma_{SE(13)}\|=\|(2\beta\boldsymbol{I}+p^2\overline{\boldsymbol{G}})^{-1}(2\beta\boldsymbol{I}-p^2\overline{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}})\|=\|(\boldsymbol{I}+\frac{p^2}{2\beta}\overline{\boldsymbol{G}})^{-1}(\boldsymbol{I}-\frac{p^2}{2\beta}\overline{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}})\|\leq 1.$$

所以,半显式格式(13)无条件稳定. 同理,半显式格式(14)也无条件稳定. 即有

定理 1 半显式格式(13)或(14)以及 ADE 格式(13),(14)无条件稳定.

然而,尽管格式(13),(14)无条件稳定,但仍应选取坛量 Δt 与 Δx 满足相容性条件.

3.2 GER 及 GEL 方法

讨论 GEL 方法的稳定性. 若令

$$\overline{\boldsymbol{G}}_1=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & & & \\ & & & & 1 & -1\\ & & & & -1 & 1\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{G}}_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -1\\ & & & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

则其传播矩阵 $\Gamma_{GEL}=(2\beta\boldsymbol{I}+p^2\boldsymbol{G}_1)^{-1}(2\beta\boldsymbol{I}-p^2\boldsymbol{G}_2)$,满足不等式 $\|\Gamma_{GEL}\|=\|(2\beta\boldsymbol{I}+p^2\boldsymbol{G}_1)^{-1}\cdot(2\beta\boldsymbol{I}-p^2\boldsymbol{G}_2)\|\leq 1$. 因矩阵 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2$ 的特征值分别为 $\lambda_1^{G_1}=1,\lambda_{2i}^{G_1}=0,\ \lambda_{2i-1}^{G_1}=2\ (i=1,2,\cdots,\frac{M-2}{2})$; $\lambda_{2i-1}^{G_2}=0,\lambda_{2i}^{G_2}=2,\ \lambda_{m-1}^{G_2}=1\ (i=1,2,\cdots,\frac{M-2}{2})$. 从而, $\|\Gamma_{GEL}\|_2=\|(2\beta\boldsymbol{I}+p^2\boldsymbol{G}_1)^{-1}\cdot(2\beta\boldsymbol{I}-p^2\boldsymbol{G}_2)\|_2=\left|\frac{2\beta-2p^2}{2\beta}\right|\leq 1$. 由此得 $p^2\leq 2\beta$, 即 $p\leq\sqrt{2(1+a\Delta t)}$. 于是得

定理 2 分组显式方法 GER 及 GEL 格式的(弱)稳定性条件为 $p=\frac{\Delta t}{\Delta x}\leq\sqrt{2(1+a\Delta t)}$.

3.3 (S)AGE 及(D)AGE 方法

仅证(S)AGE 方法稳定性. 只需考虑其传播矩阵 $\Gamma_{(S)AGE}=(2\beta\boldsymbol{I}+p^2\boldsymbol{G}_2)^{-1}(2\beta\boldsymbol{I}-p^2\boldsymbol{G}_1)\cdot(2\beta\boldsymbol{I}+p^2\boldsymbol{G}_1)^{-1}(2\beta\boldsymbol{I}-p^2\boldsymbol{G}_2)$, 满足 $\|\Gamma_{(S)AGE}\|\leq 1$. 由 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2$ 的特征值知,对任意 $p>0$, 均有

$$\left|\frac{(2\beta-p^2\lambda_k^{G_1})(2\beta-p^2\lambda_k^{G_2})}{(2\beta+p^2\lambda_k^{G_1})(2\beta+p^2\lambda_k^{G_2})}\right|\leq 1\qquad k=1,2,\cdots,M-1$$

成立,从而 $\|\Gamma_{(S)AGE}\|\leq 1$. 由此,表明(S)AGE 方法无条件(弱)稳定. 于是证明了

定理 3 (S)AGE 及(D)AGE 方法对任意 $p>0$, 是无条件稳定的.

注 由于 $\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{G}_2+\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}$ 为非负定矩阵,因而也可由 kellogg 引理[4]证明定理 3.

4 数值例子

在具有耗散项的双曲型方程混合问题[~3]中,取 $f(x,t)=8, f_1(x)=f_2(x)=g_1(t)=g_2(t)=0$. 其准确解[]为

$$u(x,t)=4x(1-x)-\frac{16}{\pi^3}e^{-t}\sum_{k=1,3,5,\cdots}\frac{1}{k^3}\cdot$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-k^2\pi^2}}\right)e^{\sqrt{1-k^2\pi^2}\,t}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-k^2\pi^2}}\right)e^{-\sqrt{1-k^2\pi^2}\,t}\right]\sin k\pi x.\qquad(21)$$

结果比较,如表 1 所示. 表中 $p = \Delta t/\Delta x$, $r = \Delta t/\Delta x^2$.

表 1　结果比较

x_j	准　确　解	ADE 格式	(D) AGE 格式
	$\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.03$, $r = 3.0$, $p = 0.3$, $t = 3$, $N = 100$)		
0.1	0.361 473 15	0.371 484 99	0.371 586 59
0.2	0.641 473 15	0.661 049 60	0.661 128 53
0.3	0.841 473 15	0.868 492 51	0.868 613 47
0.4	0.961 473 15	0.993 763 72	0.993 783 89
0.5	1.001 473 15	1.035 648 83	1.035 553 92
	$\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $r = 10.0$, $p = 1.0$, $t = 10$, $N = 100$)		
0.1	0.359 998 89	0.360 021 03	0.359 244 07
0.2	0.639 998 89	0.640 008 77	0.639 737 09
0.3	0.839 998 89	0.840 085 37	0.839 418 24
0.4	0.959 998 89	0.960 046 60	0.958 877 17
0.5	0.999 998 89	1.000 032 32	0.999 221 36

郑兴华同志协助上机计算, 谨致谢意.

参　考　文　献

1 Саульев В К 著. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎译. 北京: 科学出版社, 1961. 221～284

2 Evans D J, Abdullah A R B. Group explicit method for parabolic equation[J]. Int. J. Computer Math., 1983, 14: 73～105

3 Abdullah A R B, Evans D J. A new strategy for solving second-order hyperbolic equations using asymmetric formulac[J]. Comput. Math. Applic, 1987. 13(9): 831～838

4 张宝琳, 袁国兴, 刘兴平等. 偏微分方程并行有限差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 1994. 85～222

Grouping Explicit Method for Solving Second-Order Hyperbolic Equation with Term of Dissipation

Zeng Wenping

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A second order hyperbolic equation with term of dissipation is decomposed into two first-order equations as the first step. For solving this kind of second-order hyperbolic equations, the grouping explicit method is presented by applying asymmetric formula. And then, the alternatively grouping explicit method is proved to be unconditionally stable. As shown by numerical experiment, these new methods are satisfactory.

Keywords　second-order hyperbolic equation, term of dissipation, grouping explicit method, stability