第 22 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.22 No.3
2001 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul.2001

文章编号 1000-5013(2001)03-0232-05

拟交比同胚的偏差估计

林珍连 黄心中

(华侨大学经济管理学院, 泉州 362011)

摘要 研究单位圆周上拟交比同胚的一些偏差估计,并对拟交比同胚作为 ρ-拟对称函数中的 ρ 的上界给出估计,其结果改进了近期由 Zajac 得到的相应结果.

关键词 拟交比同胚, 拟对称函数, 偏差估计

中图分类号 O 174.55 文献标识码 A

实轴 **R** 到 **R** 上的一个单调增加连续函数 h 称为拟对称: 如果对一切 $x, t\in\mathbf{R}$ 及 $t\neq 0$, $\max\{\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}, \frac{h(x)-h(x-t)}{h(x+t)-h(x)}\}$ 有界; 如果这个界限是 ρ, 就称 h 是 ρ-拟对称. 我们知道 R 上的 ρ-拟对称函数, 刻画了上半平面 H 到 H 上的拟共形延拓的边界值. 1987 年, Krzyż[1] 给出了单位圆周 $T=\{z\,|\,|z|=1\}$ 上自同胚映照为拟对称函数的定义. 即 $\tilde{h}$ 关于单位圆周 T 是拟对称的当且仅当存在一个常数 $\rho\geq 1$, 使得对 T 的每一对不相交的, 相邻的, 且具有相等弧长的开子弧 α_1, α_2 有 $|\tilde{h}(\alpha_1)|/|\tilde{h}(\alpha_2)|\leq\rho$, 其中 $|\alpha|$ 表示弧长. 随后, Zajac[2] 给出了单位圆周上拟交比同胚的定义, 即单位圆周 T 上的一个保向同胚映照 f 称为 T 的一个拟交比同胚. 如果对 T 上不同 z_1, z_2, z_3, z_4 所成的有序点组, 存在常数 $\rho\geq 1$, 满足

$$\Phi_{1/K}[z_1,z_2,z_3,z_4]\leq[f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4)]\leq\Phi_K[z_1,z_2,z_3,z_4], \tag{1}$$

其中 $[z_1,z_2,z_3,z_4]=\{[(z_3-z_2)/(z_3-z_1)]/[(z_4-z_2)/(z_4-z_1)]\}^{\frac{1}{2}}$, $\Phi_K(t)=\mu^{-1}(\frac{1}{K}\mu(t))$ 是 Hersch-Pfluger[3] 偏差函数, $\mu(t)$, $0<t<1$, 是环 $D\backslash[0,r]$ 的模. 拟交比同胚是单位圆盘 $\Delta=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上拟共形映照的边界值的一种几何表征, 由于拟对称函数和拟交比同胚在拟共形映照理论和 Teichmüller 空间理论研究中起了重要的作用, 促使不少学者开展研究, 试图寻找两类函数之间的异同点. 本文将对拟交比同胚的象与原象及其辐角的偏差, 以及其作为 ρ-拟对称函数中的 ρ 作进一步的研究, 改进 Zajac 所得到的相应的结果.

1 几个相关定理

用 $Q_T(\rho)$ 表示 T 上所有 ρ-拟对称函数的集合, $Q_T^0(\rho)=\{f\in Q_T(\rho), f(1)=1\}$; $A_T(K)$ 表示 T 上一切拟交比同胚所成的全体. 特别地, 置

$$A_T^0(K)=\{f\,|\,f\in A_T(K),\quad f(z)=z, z^3=1\}.$$

收稿日期 2000-12-18 作者简介 林珍连(1970-), 女, 助教

关于$A_T(K)$是不是拟对称的问题, Zajac 在不考虑拟共形延拓条件下作出肯定的回答. 即证明了下面的定理 .

定理 A　如果$f\in A_T(K)$, 则存在一个常数 $\rho=\rho(f, K)$, 使得$f\in Q_T(\rho)$且

$$\rho\leq\lambda(K)\cot^2(\varphi/4), \tag{2}$$

其中 $\varphi=\min\limits_{z\in T}\min\{\arg\frac{f(-z)}{f(z)}, 2\pi-\arg\frac{f(-z)}{f(z)}\}$.

定理 B　如果$f\in A_T^0(K)$, 则存在一个常数 $\rho\geq 1$, 使得$f\in Q_T^0(\rho)$, 满足

$$\rho\leq\begin{cases}\lambda(K)\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\wedge(K)}{1-\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\wedge(K)}\right)^2 & 1\leq K\leq K_0,\\ \dfrac{1}{3}\lambda(K)\,16^{K-1}(3+2\sqrt{2})^{2K} & K>K_0.\end{cases} \tag{3}$$

式(3)中

$$\wedge(K)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{K+1}{3K-1}\right)^2 & 1\leq K\leq\dfrac{3}{2},\\ 1-(2K-1)^{-2} & \dfrac{3}{2}<K\leq 4,\\ 1-4^{1-K} & K>4.\end{cases} \tag{4}$$

其中K_0满足下列方程的解, 即

$$1+\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\wedge(K)=\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(1-\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\wedge(K)\right).$$

定理 C　设$f\in A_T^0(K)$, $K\geq 1$ 且$z\in T$, 则

$$|f(z)-z|\leq|\arg f(z)-\arg z|\leq\frac{4}{\sqrt{3}}\wedge(K). \tag{5}$$

本文将对$A_T^0(K)$中函数的偏差定理、ρ-拟对称函数中的 ρ 的上界作进一步估计, 从而改进了 Zajac 的相应的结果 .

2　主要结论及其证明

我们将证明下列的定理

定理 1　设$f\in A_T^0(K)$, $K\geq 1$ 且$z\in T$, 则

$$|f(z)-z|\leq\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{3}}\left(1-\left(\dfrac{K+1}{3K-1}\right)^2\right) & 1\leq K\leq\dfrac{3}{2},\\ 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\dfrac{2\Phi_K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1}{\sqrt{3}}\right) & \dfrac{3}{2}<K.\end{cases} \tag{6}$$

证明　不失一般性, 假设 $z\in T$, 满足 $0\leq\arg z\leq\frac{2\pi}{3}$, $\alpha=\arg z-\frac{\pi}{3}$, 则$|\alpha|\leq\frac{\pi}{3}$. 又设 $z_l=e^{\frac{2\pi}{3}li}$, $l=1, 2, 3$, 则有

$$[z_3, z, z_1, z_2]^2 = \left(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)/2. \tag{7}$$

对任意 $f \in A^0_r(K)$ 且 $\beta = \arg f(z) - \frac{\pi}{3}$，成立

$$\Phi^2_{1/K}\left(\frac{\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right) \le \frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{2} \le \Phi^2_K\left(\frac{\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right). \tag{8}$$

特别地，当 $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$，即 $\alpha = 0$，有

$$\frac{\pi}{3} - 2\mathrm{arctg}\left(\left(2\Phi^2_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1\right)/\sqrt{3}\right) \le \arg f\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) \le$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{arctg}\left(\left(2\Phi^2_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1\right)/\sqrt{3}\right). \tag{9}$$

由于 $f(z)$ 是保向的，当 $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$ 时，如果 $\arg z \ge \arg f(z)$，有

$$|f(z) - z| = 2\sin\frac{\arg z - \arg f(z)}{2} \le 2\sin\frac{\frac{\pi}{3} - \arg f(z)}{2} \le 1.$$

如果 $\arg z \le \arg f(z)$，有

$$|f(z) - z| \le 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \mathrm{arctg}\frac{2\Phi^2_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{\sqrt{3}}\right).$$

当 $\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{2\pi}{3}$ 时，如果 $\arg z \ge \arg f(z)$，有

$$|f(z) - z| \le 2\sin\frac{\arg z - \frac{\pi}{3} + 2\mathrm{arctg}\frac{2\Phi^2_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{\sqrt{3}}}{2} \le$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \mathrm{arctg}\frac{2\Phi^2_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{\sqrt{3}}\right),$$

如果 $\arg z \le \arg f(z)$，有

$$|f(z) - z| = 2\sin\frac{\arg f(z) - \arg z}{2} \le 2\sin\frac{\frac{2\pi}{3} - \arg z}{2} \le 1. \tag{10}$$

当 $z \in \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$，$z \in \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$ 时，用同样的方法可证 $|f(z) - z|$ 诸不等式也是成立的．综上所述，我们可知 $|f(z) - z| \le 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \mathrm{arctg}\frac{2\Phi^2_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{\sqrt{3}}\right)$．又当 $K > \frac{3}{2}$ 时，$2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \mathrm{arctg}\frac{2\Phi^2_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{\sqrt{3}}\right) < \frac{4}{3}\left(1 - (2K-1)^{-2}\right)$．定理得证．

定理 2　对每一个 $K \geq 1, f \in A_T^0(K)$, 且 $z \in T$, 则 $\left|\arg f(z) - \arg z\right| \leq A(K)$, 其中

$$A(K) = \begin{cases} \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{K+1}{3K-1}\right)^2\right) & 1 \leq K \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{4}{3}\left(1 - (2K-1)^{-2}\right) & \frac{3}{2} < K \leq K_0, \\ \frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arctg}\left(\left(2\Phi_K^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)/\sqrt{3}\right) & K > K_0, \end{cases} \tag{11}$$

其中 K_0 满足方程 $\frac{4}{3}(1-(2K-1)^{-2}) = \frac{2\pi}{3}$.

证明　类似定理 1 的证明, 由式(9), 我们有下列的估计. (1) 当 $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ 时, 有

$$-\frac{\pi}{3} \leq \arg f(z) - \arg z \leq \frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arctg}\left(\left(2\Phi_K^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)/\sqrt{3}\right).$$

(2) 当 $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ 时, 有

$$-\frac{\pi}{3} \leq \arg z - \arg f(z) \leq \frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arctg}\left(\left(2\Phi_K^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)/\sqrt{3}\right).$$

因此, 对 $0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$, 有

$$\left|\arg f(z) - \arg z\right| \leq \frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arctg}\left(\left(2\Phi_K^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)/\sqrt{3}\right). \tag{12}$$

由 f 的对称性知, 当 $z \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, $z \in \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$ 时, 式(12) 也成立. 令 K_0 是方程 $\frac{4}{3}(1-(2K-1)^{-2}) = \frac{2\pi}{3}$ 的解, 当 $K > K_0$ 时, 易证 $\frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arctg}\left(\left(2\Phi_K^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)/\sqrt{3}\right) < \frac{4}{3}(1 - 4^{1-K})$. 根据定理 **C**, 定理得证.

定理 3　$f \in A_T^0(K)$, $K \geq 1$, 则存在 $\rho \geq 1$, 使得 $f \in Q_T^0(\rho)$, 满足

$$\rho \leq \begin{cases} \lambda(K)\left[\dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{K+1}{3K-1}\right)^2\right)}{1 - \operatorname{tg}\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{K+1}{3K-1}\right)^2\right)}\right]^2 & 1 \leq K \leq K_1, \\ \frac{1}{3}\lambda(K)(1 + 2\lambda(K))^2 & K > K_1, \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\lambda(K) = \Phi_K^2\left(\frac{1}{2}\right) / \Phi_{1/K}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ [3], 且 $1.147 < K_1 < 1.148$, 满足

$$1 + \operatorname{tg}\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{K+1}{3K-1}\right)^2\right) = \sqrt{3}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{K+1}{3K-1}\right)^2\right)\right).$$

证明　设 $f \in A_T^0(K)$, 当 $z \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, 根据 $f(z)$ 的保向性, 有

$$0 < \arg f(z) \leq \arg f\left(e^{\frac{3}{\pi}i}\right) \leq \frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arctg}\left(\left(2\Phi_K^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1\right)/\sqrt{3}\big).$$

由 f 的对称性知, $\arg f(-z)$ 的一个下界为 $\pi-2\mathrm{arctg}((2\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1)/\sqrt{3})$. 这样, 我们有

$$\varphi>\frac{2\pi}{3}-4\mathrm{arctg}((2\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1)/\sqrt{3}). \tag{14}$$

对 $z\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 及其它部分, 同理可证式(14)也成立. 从而

$$\cot^2(\frac{\varphi}{4})<(\frac{\sqrt{3}+(2\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1)/\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}(2\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1)/\sqrt{3})})^2=$$

$$\frac{1}{3}((1+\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}}))/(1-\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})))^2=$$

$$\frac{1}{3}(\frac{2\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})+\Phi_{1/K}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})}{\Phi_{1/K}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})})^2=\frac{1}{3}(1+2\lambda(K))^2.$$

根据文献[3], $\lambda(K)$ 可表为

$$\lambda(K)=\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\delta(K),\qquad \delta(K)\in(e^{-\pi K},2e^{-\pi K}).$$

所以, $\frac{1}{3}\lambda(K)(1+2\lambda(K))^2<\frac{1}{3}\lambda(K)16^{K-1}(3+2\sqrt{2})^{2K}$. 另一方面, $\varphi>\min\limits_{z\in T}(\pi-2|\arg f(z)-\arg z|)\geq\pi-\frac{8}{3}(1-(\frac{K+1}{3K-1})^2)$, 令 K_1 为 $(1+\mathrm{tg}\frac{2}{3}(1-(\frac{K+1}{3K-1})^2))=\sqrt{3}(1-\mathrm{tg}\frac{2}{3}(1-(\frac{K+1}{3K-1})^2))$ 的解. 故(13)式成立, 定理证毕.

参考文献

1 Krzyż J G. Quasicircles and harmonic measure[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 1987, 12: 19～24

2 Zajac J. Quasisymmetric functions and quasihomographies of the unit circle[J]. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect A, 1990, 54(10): 87～99

3 Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinnen M. Distortion function for plane quasiconformal mappings[J]. Israel. J. Math., 1988, 62(1): 1～16

Distortion Estimates for Quasihommographies

Lin Zhenlian Huang Xinzhong

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Some distortion estimates of qusihommographies on unit circle are studied. Estimate is also given to the upper bound of ρ for quasihommographies to be regarded as ρ-quasisymmetric function. These results improve the corresponding results obtained by Zajac recently.

Keywords quasihommographies, quasisymmetric function, distorion estimate